Probleme propuse * Setul 3

21. (structuri algebrice) Mulţimea matricelor de forma $M(x)=\begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2(1-x) & 2x-1 \end{pmatrix}$, $x\neq 0$, formează relativ la înmulţirea matricelor un grup izomorf cu grupul multiplicativ $\mathbb{R}^*$. Atunci

a) $(M(2))^5=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $(M(2))^5=\begin{pmatrix} -30 & 31 \\ -62 & 63 \end{pmatrix}$; c) $(M(2))^5=\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$;
d) $(M(2))^5=\begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -30 & 31 \end{pmatrix}$; e) $(M(2))^5=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; f) $(M(2))^5=\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22. (structuri algebrice) Pe $\mathbb{R}$ se consideră legile de compoziţie $x\oplus y=mx+ny-1$, $x\odot y=2xy-2x-2y+p$. Să se determine m,n şi p astfel încât $(\mathbb{R},\oplus,\odot)$ să fie corp.

a) $1,2,3$; b) $1,1,3$; c) $m=n=1$, $p\in\mathbb{R}$, d) $1,1,1+i$; e) problema nu are soluţie; f) $1,1,0$.

23. (funcţia de gradul doi) Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $2x^2+2(m+2)x+m^2+4m+3=0$, unde m este un parametru real. Care este mulţimea valorilor parametrului m pentru care $|x_1+x_2+3x_1x_2|<1$?

a) $m\in(-3,-\frac{1}{3})$; b) $m\in(\frac{-5-\sqrt{10}}{3},-\frac{7}{3})$; c) $m\in(-3,-\frac{7}{3})\cup(-1,-\frac{1}{3})$;
d) $m\in(-\infty,-\frac{7}{3})\cup(-1,+\infty)$; e) $m\in(-\infty,-3)\cup(-\frac{1}{3},+\infty)$; f) $m\in\emptyset$.

24. (şiruri) Fie $a,r,q\in\mathbb{R}$, $q\neq 1$ fixate şi fie şirurile $x_n=(a+(n-1)r)q^{n-1}$ şi $y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$. Care afirmaţie este adevărată ?

a) x_n este o progresie geometrică; b) $y_n=a\frac{1-q^n}{1-q}+rq\frac{(n-1)q^n-nq^{n-1}+1}{(1-q)^2}$;
c) $y_n=a\frac{1-q^n}{1-q}+rq(q^n-1)\frac{nq-1}{(1-q)^2}$; d) x_n este şir nemărginit $\forall a,r,q\in\mathbb{R}$;
e) $y_n=a\frac{1-q^n}{1-q}+rq(q^{n-1}-1)\frac{nq^2-(n-1)q+1}{(1-q)^2}$; f) $y_n=a\frac{1-q^n}{1-q}+nr\frac{(n-1)q^{n+1}-nq^n+2}{(1-q)^2}$.

25. (şiruri) Se consideră şirul cu termenul general $x_n=\dfrac{\sin n!}{1+4^n}$, $n\in\mathbb{N}$. Atunci

a) (x_n) este monoton şi mărginit; b) (x_n) este monoton; c) $\sup x_n=0$;
d) (x_n) este convergent; e) $\inf x_n=0$; f) $x_n\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

26. (derivabilitate) Fie $f:(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+\sqrt{x^2-1})^\alpha$, $(\alpha\in\mathbb{R})$. Pentru orice $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, valoarea expresiei $E(x)=(x^2-1)f''(x)+xf'(x)$ este

a) $\alpha^2 f(x)$; b) $f(x)$; c) 0; d) $f'(x)$; e) $\alpha f'(x)$; f) $\alpha^2 f'(x)$.

27. (integrale definite) Să se calculeze $I=\lim\limits_{a\to\infty}\displaystyle\int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{1+|x-a|}$.

a) $I=\ln 3$; b) $I=1$; c) $I=\mathrm{e}$; d) $I=\mathrm{e}^{-1}$; e) $I=\ln 2$; f) $I=0$.

28. (geometrie analitică) Fie ecuaţiile $6\sin^2 x+3\sin x\cos x-5\cos^2 x=2$ şi $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=2$. Câte soluţii comune au aceste ecuaţii ?

a) nici una; b) o infinitate; c) două; d) toate; e) trei; f) patru.

29. (funcţii trigonometrice) Fie $E=\sin\left(\arccos\dfrac{3}{5}+\arccos\dfrac{15}{17}\right)$. Atunci

a) $E=\frac{34}{35}$; b) $E=\frac{84}{85}$; c) $E=\frac{83}{85}$; d) $E=\frac{13}{85}$; e) $E=\frac{27}{85}$; f) $E=\frac{36}{85}$.

30. (ecuaţii trigonometrice) Fie $A=\{x\in\mathbb{R}\mid \cos(3\arccos x)=\cos(2\arccos x)+1\}$. Atunci

a) $A=\{0,1,-1\}$; b) $A=\left\{0,\frac{1-\sqrt{13}}{4};\frac{1+\sqrt{13}}{4}\right\}$; c) $A=\left\{0,\frac{1+\sqrt{13}}{4}\right\}$;
d) $A=\left\{0,\frac{1-\sqrt{13}}{4}\right\}$; e) $A=[-1,1]$; f) $A=\mathbb{R}$.