Probleme propuse * Setul 1

1. (sisteme de ecuaţii) Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$ şi $f : \mathbb{R}\backslash\{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Fie A mulţimea valorilor funcţiei f şi $\mathbb{I}$ mulţimea numerelor iraţionale. Atunci
a) $A \cap \mathbb{I} = \emptyset$; b) $A \cap \mathbb{I} = A$; c) $A \cap \mathbb{I} = \mathbb{I}$; d) $A \cap \mathbb{I} = \{0\}$; e) $A \cap \mathbb{I} = (0, +\infty)$;
f) $A \cap \mathbb{I} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y = a + b\sqrt{2} \;\; a, b \in \mathbb{Q}\right\}$.

2. (polinoame) Câte polinoame $p(X)$ de grad 3 cu coeficienţi întregi satisfac condiţiile $p(7) = 5$ si $p(15) = 9$?
a) o infinitate; b) trei; c) unul; d) nici unul; e) patru; f) zece.

3. (determinanţi) Calculaţi determinantul $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ ştiind că x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$.
a) 2; b) -2; c) 4; d) -4; e) 1; f) -1.

4. (limite de funcţii) Să se studieze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-3x(\cos x + 3\sin x)}}{\mathrm{e}^{-2x(\cos x + \sin x)}}$.

a) nu există; b) 0; c) ∞; d) $-\infty$; e) 1; f) -1.

5. (continuitate) Pentru ce valori ale lui $a, b \in \mathbb{R}$ funcţia $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{a}{x^2}, & x < 0 \\ ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$ este continuă ?
a) $a = b = 1$; b) $a = b$; c) $a \in \mathbb{R}$ şi $b = 0$; d) f este discontinuă pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$; e) $a = 0$ şi $b \in \mathbb{R}$; f) $a = 0, b = 1$.

6. (derivabilitate) Dacă notăm prin $[a]$ partea întreagă a numărului real a, atunci funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; f(x) = \begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right], \; x \neq 0 \\ 1, \; x = 0 \end{cases}$$

a) este derivabilă; b) este continuă; c) este derivabilă în $x = 1$; d) este continuă în $x = 1$; e) este continuă în $x = 0$; f) este derivabilă în $x = -1$.

7. (limite de şiruri) Folosind sumele Riemann, să se calculeze limita

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}\right).$$

a) $\ell = \frac{3}{2}$; b) $\ell = \frac{1}{\pi}$; c) $\ell = \frac{2}{3}$; d) $\ell = \frac{3}{2\pi}$; e) $\ell = \frac{2}{\pi}$; f) $\ell = 2$.

8. (geometrie analitică) Fie $A(3, 0)$, $B(0, 3)$ şi fie $C(a, b)$ pe dreapta $y + x = 8$ astfel încât triunghiul ABC este isoscel cu baza AB. Fie $H(x_0, y_0)$ ortocentrul triunghiului ABC şi $s = x_0 + y_0$. Atunci
a) $s = \frac{24}{5}$; b) $s = 6$; c) $s = 4$; d) $s = \frac{12}{5}$; e) $s = \frac{16}{7}$; f) $s = \frac{17}{3}$.

9. (ecuaţii trigonometrice) Să se determine constantele m, n, p astfel încât

$$\sin^4 x + \cos^4 x + m(\sin^6 x + \cos^6 x) + n(\sin^8 x + \cos^8 x) + p(\sin^{10} x + \cos^{10} x) = 1,\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) $1, 1, 1$; b) $6, -10, 4$; c) $\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$; d) $3, -5, 2$; e) $1, -1, 1$; f) $2, -3, 4$.

10. (ecuaţii algebrice) Decideţi care dintre numerele complexe următoare nu este soluţie a ecuaţiei

$$z^6 - 9z^3 + 8 = 0\ ?$$

a) 2; b) $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$; c) $-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$; d) $-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$; f) $1 + \mathrm{i}\sqrt{2}$.