Capitolul 1

Algebră

1.1 Mulţimi, funcţii. Funcţia de gradul al doilea

1.1A Fie sistemul $\begin{cases} x+y+z=a \\ 2xy-z^2=9 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$. Fie A mulţimea acelor $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul admite o unică soluţie reală şi $S = \sum_{a \in A} a$. Atunci

a) $S=4$; b) $S=10$; c) $S=2$; d) $S=0$; e) $S=8$; f) $S=\frac{2}{3}$.

1.2A Să se determine polinoamele de gradul al doilea $f = a_0 + a_1X + a_2X^2$ astfel încât $f(0)=6$ şi $f(2)=f(3)=0$.

a) $6-3X+2X^2$; b) $6+5X+X^2$; c) problema are două soluţii; d) $6+5X-X^2$; e) $6-5X+X^2$; f) nu există un astfel de polinom.

1.3A Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{3x+19}-\sqrt{x+2}=\sqrt{x+7}$.

a) $x=-22/3$; b) $x=5$; c) $x \in \{-22/3, 2\}$; d) $x=2$; e) $x=3$; f) $x=10$.

1.4A Să se rezolve ecuaţia $x^2-4x=3\sqrt{x^2-4x+20}-10$.

a) $x=-1$; b) $x \in \{-1,5\}$; c) $x \in (-1,5)$; d) $x=5$; e) $x=3$; f) $x=2$.

1.5A Se dau ecuaţiile $x^2+px+1=0$, $x^2-x+p=0$. Să se determine p astfel încât suma pătratelor soluţiilor unei ecuaţii să fie egală cu suma pătratelor soluţiilor celeilalte ecuaţii.

a) $p_1=2, p_2=-1$; b) $p_1=3, p_2=1$; c) $p_1=1, p_2=-3$; d) $p_1=p_2=2$; e) $p_1=p_2=1$; f) $p_1=p_2=-3$.

1.6A Soluţiile ecuaţiei $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}=0$ sunt

a) $x_1=-1, x_{2,3}=-1\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$; b) $x_1=-2, x_{2,3}=-2\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$;
c) $x_1=2, x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$; d) $x_1=1, x_{2,3}=1\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$;
e) $x_1=1, x_{2,3}=\pm 2$; f) $x_1=3, x_{2,3}=\pm 2$.

1.7A Să se determine valorile parametrului $m\in\mathbb{R}$ astfel ca soluţiile ecuaţiei următoare $(m-1)x^2-2(m-2)x+m-4=0$ să verifice $x_1<2<x_2$.

a) $m\in(0,1)$; b) $m\in(-1,0)$; c) $m\in(1,2)$; d) $m\in(0,\frac{1}{2})$; e) $m\in(\frac{1}{2},1)$; f) $m\in(0,2)$.

1.8A Soluţiile ecuaţiei $\sqrt[3]{x-1}-x=-1$ sunt

a) $1,2,3$; b) $2,3,1$; c) 2; d) 0; e) 1; f) $0,1,2$.

1.9A Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x-8}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2x-10}$ în $\mathbb{R}$.

a) $x=2$; b) $x=3$; c) $x=4$; d) $x=5$; e) $x=8$; f) $x=6$.

1.10A Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$.

a) $x\in[\frac{1}{2},1]$; b) $x>\frac{1}{2}$; c) $x=\frac{1}{2}$; d) $x=2$; e) $x=1$; f) $x<2$.

1.11A Aflaţi soluţiile sistemului $\frac{xyz}{x+z}=\frac{mp}{m+p}$, $\frac{xyz}{y+z}=\frac{np}{n+p}$, $\frac{xyz}{x+y}=\frac{mn}{m+n}$, unde $mnp>0$.

a) (m,n,p); b) $(-m,-n,-p)$; c) $\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n},\frac{1}{p}\right)$; d) $\left(-\frac{1}{m},-\frac{1}{n},-\frac{1}{p}\right)$;
e) $\left(\pm\frac{\sqrt{mnp}}{m},\pm\frac{\sqrt{mnp}}{n},\pm\frac{\sqrt{mnp}}{p}\right)$; f) (m^2,n^2,p^2).

1.12A Rezolvaţi sistemul $x+y+z=d$, $y+z+t=a$, $z+t+x=b$, $t+x+y=c$.

a) $x=y=z=t=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$; b) $x=y=z=t=\frac{3}{4}(a+b+c+d)$;
c) $x=-a+b+c+d, y=a-b+c+d, z=a+b-c+d, t=a+b+c-d$;
d) $x=\frac{1}{3}(-2a+b+c+d), y=\frac{1}{3}(a-2b+c+d), z=\frac{1}{3}(a+b-2c+d), t=\frac{1}{3}(a+b+c-2d)$; e) $x=3a, y=3b, z=3c, t=3d$; f) nu are soluţii.

1.13A Dacă x,y,z satisfac relaţiile

$$x+y+z=14,\ x^2+y^2+z^2=98,$$

atunci suma $xy+yz+zx$ are valoarea

a) 49; b) 98; c) 196; d) 0; e) 10; f) 100.

1.14A Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-3$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=3x-2$. Notăm $A=\{x|f(x)g(x)\geq 0\}$ şi $B=\left\{x\,\middle|\,\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0\right\}$. Atunci

a) $A=B$; b) $A\cap B=\varnothing$; c) $B\subset A$; d) $A\subset B$; e) $A\cup B=B$; f) $A\setminus B=\varnothing$.

1.15A Dacă $A=\left\{x\in\mathbb{R}|x^2-x>12\right\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{R}|x(x-2)>8\right\}$ şi $C=\left\{x\in\mathbb{R}|x^2-x-2>0\right\}$, atunci

a) $A\subset B\cap C$; b) $C\setminus B\subset A$; c) $C\subset A\cup B$; d) $B\subset A\cap C$; e) $B\subset A\setminus C$; f) $A\subset C\setminus B$.

1.16A Să se rezolve ecuaţia $|x-1|-3|x+1|=6$.

a) $x=1$; b) $x\in[-5,1]$; c) $x=-5$; d) $x\in\{1,-5\}$; e) $x=3$; f) $x\in\varnothing$.

1.17A Determinaţi mulţimea $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,2x+3\geq 0 \text{ şi } \frac{x-2}{x(x-3)}<0\right\}$.

a) $-\frac{3}{2},3)$; b) $[-\frac{3}{2},0)\cup(2,3)$; c) $(0,2)\cup(3,\infty)$; d) $(-\frac{3}{2},0)\cup(2,3)$;
e) $(-\frac{3}{2},0)\cup(2,\infty)$; f) $[-\frac{3}{2},3)$.

1.18A Fie $A=\left\{\sum_{k=1}^{n^2+4n+3}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$. Atunci

a) $A\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; b) $A\subset\{2m+1|m\in\mathbb{N}^*\}$; c) $A\subset\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$; d) $A\subset\{2m|m\in\mathbb{N}\}$; e) $A=\mathbb{N}^*$; f) $A\subset\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.

1.19A Fie $A=\left\{\frac{9+x^2}{9-x^2}\,\middle|\,x\in(-1,2)\right\}$. Să se afle $m=\inf A$ şi $M=\sup A$.

a) $m=1, M=\frac{5}{4}$; b) $m=1, M=\frac{13}{5}$; c) $m=\frac{5}{4}, M=\frac{13}{5}$; d) $m=-1, M=2$;
e) $m=-1, M=1$; f) $m=\frac{5}{4}, M=2$.

1.20A Fie funcţia $f:(-2,0)\cup(2,\infty)\to[-4,\infty), f(x)=x^2-4$. Atunci

a) f nu este injectivă; b) f este surjectivă; c) f este crescătoare;
d) f este descrescătoare; e) f nu este bijectivă; f) f este inversabilă.

1.21A Pentru funcţia $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=2\sqrt{x(5-x)}$, unde $D\subset\mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiţie, notăm $M=\max_{x\in D}f(x)$ şi $m=\min_{x\in D}f(x)$. Atunci

a) $M=\frac{5}{2}, m=0$; b) $M=\frac{5}{2}, m=1$; c) $M=5, m=0$; d) $M=\infty, m=0$;
e) $M=10, m=2$; f) $M=5$, m nu există.

1.22A Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<2$ este

a) $(-\infty,-\frac{1}{2})$; b) $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$; c) $[-\frac{1}{2},0)\cup(0,\frac{1}{2}]$; d) $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$; e) $[-\frac{1}{2},0)\cup(0,\frac{1}{2})$; f) $(\frac{1}{2},\infty)$.

1.23A Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - 2(m+2)x - 1$, $g(x) = x^2 - 2x + m$. Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel încât graficele celor două funcţii să aibă două puncte comune distincte.

a) $m \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$; b) $m \in (-1, 0)$; c) $m \in (0, \infty)$;
d) $m \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$; e) $m \in \mathbb{R}^*$; f) $m \in [-1, 0]$.

1.24A Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{mx^2 - (m-1)x + m - 1}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie corect definită.

a) $m \in [-\frac{1}{3}, 1]$; b) $m \in (0, \infty)$; c) $m \in \mathbb{R} \setminus (-\frac{1}{3}, 1)$;
d) $m \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{3}, 1]$; e) $m \in \mathbb{R}^*$; f) $m \in [1, \infty)$.

1.25A Să se rezolve inecuaţia $(x^2 - 5x)(x^2 - 6x + 8) \leq 0$.

a) $x \in [0, 2] \cup [4, 5]$; b) $x \in [2, 4]$; c) $x \in [0, 5]$;
d) $x \in [0, 2]$; e) $x \in [4, 5]$; f) $x \in [0, \infty]$.

1.26A Să se rezolve ecuaţia $x^2 - 3|x| - 4 = 0$.

a) $x \in \{-1, 1\}$; b) $x \in \{1, 4\}$; c) $x \in \{-4, 4\}$; d) $x \in \{2, 3\}$; e) $x \in \{-1, 2\}$;
f) $x \in \{-4, -1, 1, 4\}$.

1.27A Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : [4, \infty) \to [a, \infty)$, $f(x) = x - 5 - 2\sqrt{x - 4}$, să fie surjectivă.

a) $a = -3$; b) $a = -2$; c) $a = -1$; d) $a = 0$; e) $a = 1$; f) $a = 2$.

1.28A Să se rezolve sistemul $\begin{cases} |x-2| + |y+3| = 4 \\ x = 2 + |y+3|. \end{cases}$

a) $x = 4, y = -1$; b) $x = 4, y = -5$; c) $x = 4, y = -1$ sau $x = 4, y = -5$;
d) $x = 1, y = 2$; e) $x = 4, y = 2$; f) $x = 2, y = -2$.

1.29A Aflaţi soluţiile reale ale ecuaţiei $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$.

a) $\{1, 5\}$; b) $\{2, 3\}$; c) $\{\pm 1, \pm 6\}$; d) $\{1, -6\}$; e) $\{1, -6, 2, 3\}$; f) $\{1, 2, 3, 4\}$.

1.30A Să se rezolve inecuaţia $\sqrt{6 - x} > x$.

a) $x < 2$; b) $x > 2$; c) $0 \leq x \leq 2$; d) $x < 6$; e) $x > 6$; f) $x < 3$.

1.31A Să se determine suma tuturor soluţiilor complexe ale ecuaţiilor următoare:

$$x^3 + 3 = 0,\ x^4 + 4 = 0,\ x^5 + 5 = 0.$$

a) -1; b) 1; c) 0; d) 2; e) -2; f) 3.

1.32A Expresia $E = (x^{1/2} + y^{1/2})^{-2} \cdot (x^{-1} + y^{-1}) + 2\dfrac{(x^{-1/2} + y^{-1/2})}{(x^{1/2} + y^{1/2})^3}$ este egală cu

a) $\frac{1}{\sqrt{xy}}$; b) $\sqrt{\frac{y}{x}}$; c) $\sqrt{\frac{x}{y}}$; d) $\frac{1}{xy}$; e) $\frac{x+y}{x-y}$; f) $\frac{x-y}{x+y}$.

1.33A Pentru $a, b, c > 0$, $\sqrt{abc} > 2$, calculaţi valoarea expresiei

$$E = \frac{1}{\sqrt{abc} - 2}\sqrt{\frac{abc + 4}{a} - 4\sqrt{\frac{bc}{a}}}$$

a) $\sqrt{a}$; b) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; c) a; d) $\frac{1}{a}$; e) 1; f) -1.

1.34A Să se rezolve inecuaţia $5x^2 - 20x + 26 > \dfrac{4}{x^2 - 4x + 5}$.

a) $x \in [-2, 3]$; b) $x \in \mathbb{R}$; c) $x < 5$; d) $x > 5$; e) $x \in [-5, 5]$; f) $x > 10$.

1.35A Determinaţi m astfel ca $x^2 + y^2 - 8x - 8y + m > 0$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $m < 32$; b) $m < 16$; c) $m > 32$; d) $m \in [8, 16]$; e) $m \in (8, 32)$; f) $m > 0$.

1.36A Pentru ce valori ale parametrului m, vârfurile parabolelor $y = x^2 + 2(m-1)x + m - 1$ se află deasupra axei Ox ?

a) $m \in (1, 2)$; b) $m \in (2, 3)$; c) $m < 1$; d) $m > 2$; e) $m \in (-1, 1)$; f) $m > 5$.

1.37A Dacă (x, y, z) este soluţie a sistemului $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + xz + yz = 0 \end{cases}$ atunci $x^2 + y^2 + z^2$ are valoarea

a) 1; b) 2; c) 4; d) 0; e) $\sqrt{2}$; f) 8.

1.38A Să se afle soluţiile pozitive ale sistemului $\begin{cases} x\sqrt[3]{yzt} = 1 \\ y\sqrt[3]{xzt} = 4 \\ z\sqrt[3]{xyt} = 9 \\ t\sqrt[3]{xyz} = 16. \end{cases}$

a) $(1, 2, 3, 4)$; b) $(4, 3, 2, 1)$; c) $\left(\frac{1}{\sqrt{4!}}, \frac{2^3}{\sqrt{4!}}, \frac{3^3}{\sqrt{4!}}, \frac{4^3}{\sqrt{4!}}\right)$;
d) $(1, -1, 1, -1)$; e) $(-1, 1, -1, 1)$; f) $\left(\frac{4^3}{\sqrt{4!}}, \frac{3^3}{\sqrt{4!}}, \frac{2^3}{\sqrt{4!}}, \frac{1}{\sqrt{4!}}\right)$.

1.39A Determinaţi numerele reale (x, y, u, v) care verifică $\begin{cases} u + v = 2 \\ ux + vy = 1 \\ ux^2 + vy^2 = -1 \\ ux^3 + vy^3 = -5. \end{cases}$

a) $(1, 2, 3, -1)$; b) $(1, 2, 3, -1), (2, 1, -1, 3)$; c) $(2, 1, -1, 3)$;
d) $(1, -1, 1, -1), (-1, 1, -1, 1)$; e) $(1, 1, 1, 1), (-1, -1, -1, -1)$; f) $(2, 1, 2, 1)$.

1.40A Ordinea crescătoare a numerelor $x = \sqrt{3} - 1$, $y = \sqrt{5} - \sqrt{2}$, $z = 1 + \sqrt{2}$ este

a) x, y, z; b) x, z, y; c) y, x, z; d) y, z, x; e) z, x, y; f) z, y, x.

1.41A Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată dacă $A = \sqrt{6}$, $B = \sqrt[4]{12}$, $C = \sqrt[3]{8}$, $D = \sqrt[6]{20}$?

a) $B < C < D < A$; b) $B < D < C < A$; c) $C < D < B < A$;
d) $C < B < D < A$; e) $D < B < C < A$; f) $D < C < B < A$.

1.42A Se consideră numerele reale $x = \frac{17}{6}$, $y = 2,8(3)$ (fracţie zecimală periodică), $z = \sqrt{7}$. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată ?

a) y este iraţional; b) z este raţional; c) $x > y$; d) $x = y$; e) $y \le z$; f) $x \le z$.

1.43A Se consideră mulţimile $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 < 3x + 2\right\}$,
$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 2 \le x + 5\right\}$. Avem

a) $A \cap B = \varnothing$; b) $A \cap B = (-3, \frac{3}{2}]$; c) $A \cup B = (-3, \frac{3}{2}]$;
d) $A \cap B = (-\infty, -3) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$; e) $A \setminus B = \varnothing$; f) $B \setminus A = \varnothing$.

1.44A Fie $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + ax = 0\right\}$. Determinaţi valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care mulţimea A este formată dintr-un singur element.

a) $a = 1$; b) $a = 0$; c) $a \in \{-1, 1\}$; d) $a \in \{0, 1\}$; e) $a \in \mathbb{R}$; f) nu există.

1.45A Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (a+3)x + a^2$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcţiei f să taie axa Ox în două puncte distincte.

a) $a = -3$; b) $a \in \mathbb{R}$; c) $a \in (-\infty, -1)$; d) $a \in (3, \infty)$; e) $a \in (-\infty, 3)$;
f) $a \in (-1, 3)$.

1.46A Să se rezolve inecuaţia $x \le \dfrac{16}{x}$.

a) $x \in [-4, 4]$; b) $x \in (-\infty, -4] \cup (0, 4]$; c) $x \in (-\infty, -4) \cup (0, 4)$; d) $x \in [4, \infty)$;
e) $x \ne 0$; f) $x \in (-\infty, -4]$.

1.47A Să se rezolve sistemul $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} + \dfrac{y-x}{2} = -\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{2x-5}{4} - \dfrac{1-y}{2} = y - \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

a) $x = 2, y = 1$; b) nu are soluţii; c) $x = 1, y = 2$;
d) $x = 1, y \in \mathbb{R}$; e) $x = y = 1$; f) $x = y = 2$.

1.48A Fie $a, b \in (0, \infty)$, $a \ne b$, şi $x = \dfrac{a+b}{2}$, $y = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, $z = \sqrt{ab}$.
Ordonaţi crescător x, y, z.

a) x, y, z; b) y, x, z; c) z, y, x; d) z, x, y; e) x, z, y; f) y, z, x.

1.49A Să se rezolve inecuaţia $\dfrac{x-1}{1-2x} \le 1$.

a) $x \in (-\infty, \frac{2}{3}] \setminus \{\frac{1}{2}\}$; b) $x \in (-\infty, \frac{2}{3}]$; c) $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup [\frac{2}{3}, \infty)$; d) $x \in \varnothing$;
e) $x \in \mathbb{R}$; f) $x \in (\frac{2}{3}, \infty)$.

1.50A Să se afle soluţiile inecuaţiei $x < |x|$.

a) $x \in (-\infty, 0)$; b) $x \in \mathbb{R}$; c) $x \in (-\infty, 0]$; d) $x \in \varnothing$; e) $x \in (0, \infty)$;
f) $x \in [0, \infty)$.

1.51A Să se determine parametrul real şi pozitiv m astfel încât o soluţie a ecuaţiei $x^2 + mx + 2m + 8 = 0$ să fie dublul celeilalte.

a) $m = 4 + 4\sqrt{3}$; b) $m = -4$; c) $m = 12$; d) $m \in \varnothing$; e) $m = 3$; f) $m = 1$.

1.52A Pentru $m \in \mathbb{R}$, considerăm ecuaţia $x^2 - (3m+1)x + \frac{1}{4} = 0$.
Fie $A = \{m \in \mathbb{R} \mid$ ecuaţia are două soluţii reale distincte$\}$ şi
$B = \{m \in \mathbb{R} \mid$ ecuaţia are soluţii de semne contrare $\}$. Determinaţi A şi B.

a) $A = (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (0, \infty), B = (-\frac{1}{3}, \infty)$;
b) $A = (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup [0, \infty), B = (-\infty, -\frac{1}{3})$;
c) $A = (-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [0, \infty)$, $B = \varnothing$; d) $A = (-\frac{2}{3}, 0)$, $B = (-\infty, -\frac{1}{3}]$;
e) $A = (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (0, \infty)$, $B = (-\infty, -\frac{1}{3})$; f) $A = (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (0, \infty)$, $B = \varnothing$.

1.53A Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + x + 3$ este

a) monoton crescătoare; b) monoton descrescătoare; c) injectivă; d) surjectivă;
e) descrescătoare pe intervalul $[1/2, \infty)$; f) crescătoare pe intervalul $[1/2, \infty)$.

1.54A Funcţia $f : (0, \infty) \to [1, \infty)$, $f(x) = x^2 + x + 1$

a) este injectivă; b) este surjectivă; c) este liniară; d) este mărginită; e) este periodică; f) nici unul dintre răspunsurile anterioare nu este corect.

1.55A Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 + (2m+1)x + 2 - m$ şi fie

$$A = \{m \in \mathbb{R} \mid f \text{ are un minim în } x = 2\}$$

$$B = \{m \in \mathbb{R} \mid \text{valoarea maximă a funcţiei } f \text{ este } 1\}.$$

Care afirmaţie este adevărată ?

a) $A = \{\frac{1}{6}\}$, $B = \{-\frac{\sqrt{2}}{2}\}$; b) $A \cap B \ne \varnothing$; c) $A = \{-\frac{1}{6}\}$, $B = \varnothing$;
d) $A = \varnothing$, $B = \{\frac{\sqrt{2}}{2}\}$; e) $A = B = \varnothing$; f) $A = \{-\frac{1}{6}\}$, $B = \{-\sqrt{3}\}$.

1.56A Să se determine mulţimea acelor $m \in \mathbb{R}$ pentru care graficele funcţiilor $f(x) = x^2 - 2x - 4$ şi $g(x) = -x^2 + 2m^2x + 6m$ au acelaşi vârf.

a) $\{1\}$; b) $\{-1\}$; c) $\{-1, 1\}$; d) $\varnothing$; e) $[-1, 1]$; f) $(0, +\infty)$.

1.57A Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$ şi $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$. Avem

a) $A = \varnothing$; b) $A = \{-1\}$; c) $A = \{1\}$; d) $A = \{0\}$; e) $A = \{2\}$; f) $A = \{3\}$.

1.58A Soluţia inecuaţiei $|x+1| > 2$ este

a) $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$; b) $x \in (-\infty, -3)$; c) $x \in (1, \infty)$;
d) $x \in (-3, 1) \cup (3, \infty)$; e) $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$; f) $x \in (-3, \infty)$.

1.59A Suma cuburilor soluţiilor ecuaţiei $x^2 - 4x + 1 = 0$ este

a) 60; b) 50; c) 56; d) 52; e) 64; f) 49.

1.60A Soluţia inecuaţiei $x^2 + x - 2 \leq 0$ este

a) $x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$; b) $x \in (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$; c) $x \in [-2, 1]$;
d) $x \in (-2, 1)$; e) $x \in (-\infty, -2] \cup (1, \infty)$; f) $x \in [-2, 1)$.

1.61A Soluţia sistemului $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ este

a) $(x, y) = (1, 3)$; b) $(x, y) \in \{(1, 3), (3, 1)\}$; c) $(x, y) = (3, 1)$;
d) $(x, y) = (2, 2)$; e) $(x, y) \in \varnothing$; f) $(x, y) \in \{(0, 4), (4, 0)\}$.

1.62A Inecuaţia $2 - x > x + 6$ are soluţia

a) $x > -2$; b) $x \geq -2$; c) $x < -2$; d) $x \leq -2$; e) $x > 0$; f) $x \geq 0$.

1.63A Fie $a, b \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$. Atunci

a) $a = b = 0$; b) $a = 0$ sau $b = 0$; c) $a > 1$; d) $ab = 1$; e) $a^2 + b^2 = 1$; f) $a < b$.

1.64A Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x + 5 \geq 2x - 11\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} | 10 - 3x < 5x - 14\}$. Atunci

a) $A \cup B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\right\}$; b) $A \cup B = \mathbb{R}$; c) $A \cup B = \varnothing$;
d) $A \cup B = \left\{x \in \mathbb{R} | x \geq -8\right\}$; e) $A \cup B = (0, +\infty)$; f) $A \cup B = [-8, 3)$.

1.65A Ecuaţia $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}$, $a, b \neq 0$, are un număr finit de soluţii. Fie $\mathbb{S}$ suma acestora. Atunci

a) $\mathbb{S} = a$; b) $\mathbb{S} = b$; c) $\mathbb{S} = a + b$; d) $\mathbb{S} = -a - b$; e) $\mathbb{S} = 1$; f) $\mathbb{S} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

1.66A Domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x) = \sqrt{x - 3 + \frac{1}{x}}$ este

a) $\mathbb{R}$; b) $[0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty)$; c) $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$;
d) $(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty)$; e) $[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 2)$; f) $[2, 3]$.

1.67A Fie $A = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt[4]{78 + x} + \sqrt[4]{19 - x} = 5\}$ şi S suma elementelor mulţimii A. Atunci

a) $S = 65$; b) $S = 3$; c) $S = -65$; d) $S = -59$; e) $S = 0$; f) mulţimea A este infinită.

1.68A Numerele reale x şi y verifică sistemul $x^2 - y^2 = 35, xy = 6$. Dacă $S = x + y$, atunci

a) $S = 7$; b) $S = -7$; c) $S = \pm 7$; d) $S = 11$; e) $S = 0$; f) $S = 14$.

1.69A Să se determine toate elementele mulţimii $\left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \frac{x+4}{x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.

a) $\{-3, -1, 1\}$; b) $\varnothing$; c) $\mathbb{N} \setminus \{1\}$; d) $\{-4, -3, -2, 1\}$; e) $\{-4, -2, 0, 2\}$;
f) $\{-1, 1, 1\}$.

1.70A Să se determine mulţimea $A = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| x = \frac{4n}{n+2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

a) $A = \{2\}$; b) $A = \{3\}$; c) $A = \{2, 3\}$; d) $A = \{0, 2, 3\}$; e) $A = \varnothing$;
f) $A = \{1\}$.

1.71A Găsiţi patru numere naturale consecutive x, y, z, w (în această ordine) care verifică relaţia $x^3 + y^3 + z^3 = w^3$.

a) 3,4,5,6; b) 2,3,4,5; c) 3,4,5,4; d) 3,4,5,3; e) 3,4,5,2; f) 3,4,5,1.

1.72A Ordinea crescătoare a numerelor $x = \sqrt{6}$, $y = \sqrt[4]{12}$, $z = \sqrt[8]{72}$ este

a) $z < y < x$; b) $z < x < y$; c) $x < y < z$; d) $x < z < y$; e) $y < x < z$;
f) $y < z < x$.

1.73A Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite de $f(x) = 3x + 2$ şi $g(x) = 3|x| + 2$. Atunci

a) f, g sunt bijecţii; b) f bijectivă, g surjectivă; c) f bijectivă, g nu este bijectivă; d) f, g injective; e) f, g surjective; f) afirmaţiile precedente sunt toate false.

1.74A Valorile parametrului real m pentru care ecuaţia $x^2 + x + m = 0$ are soluţii reale şi distincte, sunt

a) $m < 0$; b) $m \geq 0$; c) $m < 1$; d) $m \geq 1$; e) $m < 1/4$; f) $m \geq 1/4$.

1.75A Fie ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ cu soluţiile x_1 şi x_2; notăm $x_1 + x_2 = s$, $x_1 \cdot x_2 = p$. Atunci expresia $d = |x_1 - x_2|$ se exprimă în funcţie de s şi p astfel

a) $d = s - 2p$; b) $d = s^2 - 4p$; c) $d = \sqrt{s^2 - 4p}$;
d) $d = \pm\sqrt{s^2 - 4p}$; e) $d = ps$; f) $d = s/p$.

1.76A Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{4}$, atunci imaginea lui f este

a) $[0, \infty)$; b) $(-1, 1)$; c) $[-2, \infty)$; d) $(-\infty, -2]$; e) $(-\infty, 0]$; f) $\mathbb{R}$.

1.77A Sistemul $\begin{cases} x(x+y+z+t)=10 \\ y(x+y+z+t)=20 \\ z(x+y+z+t)=30 \\ t(x+y+z+t)=40 \end{cases}$ admite soluţiile

a) $x=\pm 2$, $y=\pm 1$, $z=\pm 3$, $t=\pm 4$; b) $x=\pm 2$, $y=\pm 1$, $z=\pm 4$, $t=\pm 3$; c) $x=\pm 1$, $y=\pm 2$, $z=\pm 3$, $t=\pm 4$; d) $x=y=z=t=1$; e) $x=y=z=t=10$; f) nici una din afirmaţiile precedente nu este adevărată.

1.78A Determinaţi valorile parametrului m pentru care ecuaţia $\frac{x(x+1)}{x+2}=m$ are soluţii reale de semne contrare.

a) $m\in(-\infty,-3-2\sqrt{2})\cup(-3+2\sqrt{2},\infty)$; b) $\varnothing$; c) $m\in(0,\infty)$; d) $m\in(-3-2\sqrt{2},-3+2\sqrt{2})$; e) $m\in\mathbb{R}$; f) $m\in(-\infty,0)$.

1.79A Fie a şi b numere reale astfel încât $a+b$ şi $a-b$ să fie numere raţionale. Atunci

a) $a\in\mathbb{Q}, b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; b) $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, b\in\mathbb{Q}$; c) $a\in\mathbb{Q}, b\in\mathbb{Q}$; d) $a\in\mathbb{N}, b\in\mathbb{Z}$; e) $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; f) $a\in\mathbb{N}, b\notin\mathbb{N}$.

1.80A Să se rezolve ecuaţia $|6-x|=2x+3$.

a) $x\in\{-9,1\}$; b) $x=1$; c) $x=-9$; d) $x\in\varnothing$; e) $x\in\mathbb{R}$; f) $x=2$.

1.81A Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât soluţiile x_1, x_2 ale ecuaţiei $x^2-(m+1)x+m=0$ să satisfacă relaţia $|x_1-x_2|=1$.

a) $m=0$; b) $m=8$; c) $m\in\{0,1\}$; d) $m\in\{0,2\}$; e) $m\in\varnothing$; f) $m\in(2,3)$.

1.82A Să se rezolve inecuaţia $|x^2-x-2|\le 1$.

a) $x\in\left[\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$; b) $x\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$; c) $x\in\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\infty\right)$; d) $x\in\left[\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$; e) $x\in\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$; f) $x\in\varnothing$.

1.83A Să se determine mulţimea S a soluţiilor sistemului $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$

a) $S=\varnothing$; b) $S=\{(1,-2),(-2,1),(-1,2),(2,-1)\}$; c) $S=\{-2,-1,1,2\}$; d) $S=\{(1,-2),(-2,1)\}$; e) $S=\{(-1,-2),(2,1)\}$; f) $S=\{(1,-1),(-1,1)\}$.

1.84A Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x+2y=5 \\ x^2+2y^2-xy=7. \end{cases}$

a) $(1,2)$; b) $(\frac{11}{4},\frac{9}{8})$; c) $(1,2),(\frac{11}{4},\frac{9}{8})$; d) $(1,\frac{9}{8})$; e) $(\frac{11}{4},2)$; f) $(1,\frac{11}{4})$.

1.85B Să se determine $\operatorname{Im} f$ pentru funcţia $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

a) $[-2,2]$; b) $[-1,1]$; c) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; d) $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; e) $[0,1]$; f) $(\frac{1}{2},\infty)$.

1.86B Fie $a>0$ şi $B=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;\frac{1}{x}\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1}\right\}$. Decideţi:

a) B este un interval deschis la unul din capete; b) B este un interval închis; c) B nu este interval; d) B este o mulţime nemărginită; e) B este reuniunea a două intervale deschise; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

1.87B Fie $M=\left\{(a,b)\in\mathbb{Q}^2\;\middle|\;\sqrt{a-\sqrt{3}}=a+b\sqrt{3}\right\}$ şi $k\in\mathbb{N}$ numărul elementelor mulţimii M. Avem

a) $M=\varnothing$; b) $k=1$; c) $k=2$; d) $k=3$; e) $k=4$; f) M este infinită.

1.88B Fie $M=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=\sqrt{4-2x}\right\}$. Decideţi:

a) $M=\varnothing$; b) M are un singur element; c) $M\cap(1,2)\neq\varnothing$; d) $M\setminus[0,1]=\varnothing$; e) M nu este mărginită; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

1.89B Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^5+(a^2+1)x^3+a+2$, $a\in\mathbb{R}$. Fie A mulţimea valoarilor lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care f este surjectivă. Avem:

a) $A=\{0\}$; b) $A=[0,\infty)$; c) $A=[-1,1]$; d) $A=[-2,2]$; e) $A=(-\infty,0]$; f) $A=\mathbb{R}$.

1.90B Fie x_1, x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-2x+5=0$. Să se calculeze

$$E=\frac{x_1^3-x_1^2+2x_1+4}{x_1^3-x_1^2+3x_1+3}+\frac{x_2^3-x_2^2+2x_2+4}{x_2^3-x_2^2+3x_2+3}.$$

a) $E=-1$; b) $E=2$; c) $E=0$; d) $E=4$; e) $E=-6$; f) $E=\frac{1}{2}$.

1.91B Fie x_1, x_2, x_3, x_4 soluţiile ecuaţiei $2x^4+3x^3-3x^2-3x+2=0$ şi fie $S=|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|$. Decideţi:

a) $S\in(0,1)$; b) $S\in(1,2)$; c) $S\in(2,4)$; d) $S\in(4,5)$; e) $S\in(5,8)$; f) $S>8$.

1.92B Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$. Aflaţi $\alpha=f(3)$.

a) $\alpha=6$; b) $\alpha=-1$; c) $\alpha=12$; d) $\alpha=5$; e) $\alpha=9$; f) $\alpha=4$.

1.93B Pentru $a,b\in\mathbb{Z}$ considerăm mulţimile $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+2ax+b=0\}$ şi $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+2bx+a=0\}$. Fie k numărul elementelor mulţimii $M=\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2\mid A\cap B \text{ are exact un element}\}$. Atunci

a) $M=\varnothing$; b) $k=1$; c) $k=2$; d) $k=4$; e) $k=6$; f) M este infinită.

1.94B Fie M mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care
$$-7 < \frac{x^2+(m+1)x-5}{x^2-x+1} < 3, \ (\forall) x \in \mathbb{R}.$$
Atunci

a) $M = \varnothing$; b) $M = (0,1)$; c) $M = [-1,0)$; d) $M = (-2,4)$; e) $M = (3,5)$; f) $M = (6,\infty)$.

1.95B Ecuaţia $\sqrt[5]{2x+1+2\sqrt{x^2+x}} + \sqrt[5]{2x+1-2\sqrt{x^2+x}} = 2$ are

a) o soluţie; b) două soluţii; c) trei soluţii; d) patru soluţii; e) cinci soluţii; f) nici o soluţie.

1.96B Fie $A = \left\{a \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2+1} \le ax, \ (\forall) x \in [\frac{1}{2}, 1]\right\}$. Decideţi:

a) $A = [\sqrt{5}, \infty)$; b) $A = [1,2]$; c) $A = \varnothing$; d) $A = [1,\infty)$; e) $A = [\frac{1}{2},\infty)$; f) $A = \mathbb{R}$.

1.97B Fie ecuaţia $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}} = a$ şi A mulţimea acelor $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia admite două soluţii reale şi distincte. Decideţi:

a) $A = (0,1)$; b) $A = (1,5]$; c) $A = [1,8)$; d) $A = [5,\infty)$; e) $A = \varnothing$; f) $A = (0,\infty)$.

1.98B Fie ecuaţia $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x}} = x-1$. Decideţi:

a) ecuaţia nu are soluţii; b) ecuaţia admite o soluţie unică; c) ecuaţia admite două soluţii; d) ecuaţia admite trei soluţii; e) ecuaţia admite o soluţie subunitară; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

1.99B Fie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2+ax+2$. Să se determine mulţimea valorilor $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia f este injectivă.

a) $\varnothing$; b) $\mathbb{Q}$; c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; d) $(0,1)$; e) $[-4,4]$; f) $\mathbb{R}$.

1.100B Dacă S este suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt{9+x} = 8$, atunci

a) $S \in [13,20]$; b) $S \in [20,30]$; c) $S \in [8,13]$; d) $S \in [30,42]$; e) $S \in (5,8)$; f) ecuaţia nu are soluţii reale.

1.101B Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ are proprietatea

a) nu este injectivă; b) nu este surjectivă; c) este injectivă, dar nu este surjectivă; d) este surjectivă, dar nu este injectivă; e) este bijecţie; f) este bijecţie cu $f^{-1} = f$.

1.102B Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2-2$, $g(x) = x+1$. Avem

a) $(g \circ f)(x) = (x+1)^2 - 2$; b) f este injectivă; c) $\operatorname{Im} f = [-2,\infty)$; d) f este surjectivă; e) $f \circ g$ este bijecţie; f) f este inversabilă.

1.103B Fie o mulţime A având n elemente şi $a \in A$. Să se determine numărul submulţimilor lui A care nu conţin pe a.

a) $n-1$; b) 2^n-1; c) 2^{n-1}; d) 2^n-n; e) n; f) 2^n.

1.104B Se consideră mulţimile $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2x-1} < \sqrt{3x+2}\right\}$ şi $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{3x+2} \le \sqrt{x+5}\right\}$. Avem

a) $A \cap B = \varnothing$; b) $A \cap B = B$; c) $A \cup B = \mathbb{R}$; d) $A \cup B = [-\frac{2}{3},\infty)$; e) $A \setminus B = \varnothing$; f) $B \setminus A = \varnothing$.

1.105B Se consideră ecuaţia $x^2 - mx + 2 = 0$ cu soluţiile x_1 şi x_2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1^2 + x_2^2 > m - 4$.

a) $m \in (0,1)$; b) $m \in (-\infty,1)$; c) $m \in (-\infty,0) \cup (2,\infty)$; d) $m \in (-\infty,0) \cup (1,\infty)$; e) $m \in (-\infty,1) \cup (2,\infty)$; f) $m \in (2,\infty)$.

1.106B Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $2x^2 + 2(m+2)x + m^2 + 4m + 3 = 0$, unde m este un parametru real. Care este mulţimea valorilor parametrului m pentru care $|x_1 + x_2 + 3x_1x_2| < 1$?

a) $m \in (-3,-\frac{1}{3})$; b) $m \in (\frac{-5-\sqrt{10}}{3}, -\frac{7}{3})$; c) $m \in (-3,-\frac{7}{3}) \cup (-1,-\frac{1}{3})$; d) $m \in (-\infty,-\frac{7}{3}) \cup (-1,+\infty)$; e) $m \in (-\infty,-3) \cup (-\frac{1}{3},+\infty)$; f) $m \in \varnothing$.

1.107B Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca ecuaţia $x^2 + mx - 2 = 0$ să aibă ambele soluţii în intervalul $(-1,2)$.

a) $-4 < m < -1$; b) $m > -1$; c) $-4 < m < 2$; d) $-1 < m < 2$; e) $m \in \varnothing$; f) $m > 2$.

1.108B Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a+1)x^2 - ax + a - 2$, să avem $f(x) < 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $a \in (-\infty,-1)$; b) $a \in (-\infty, \frac{2-\sqrt{28}}{3})$; c) $a \in (\frac{2+\sqrt{28}}{3},\infty)$; d) $a \in \mathbb{R}$; e) $a \in (\frac{2-\sqrt{28}}{3},\infty)$; f) $a \in (-1, \frac{2+\sqrt{28}}{3})$.

1.109B Pentru expresia $E(x,m) = m3^{2x} - 2(m-1)3^x + (m-3)$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}^*$, fie $M = \{m \in \mathbb{R}^* | E(x,m) < 0, \ \forall x \in \mathbb{R}\}$. Atunci

a) $M = \varnothing$; b) $M = (1,+\infty)$; c) $M = (-1,1)$; d) $M = (-\infty,-1)$; e) $M = \mathbb{R}$; f) $M = (-\infty,0)$.

1.110B Imaginea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 2$ este

a) $[0,\infty)$; b) $[-3,\infty)$; c) $[-3,-1]$; d) $(1,\infty)$; e) $(-2,\infty)$; f) $\mathbb{R}$.

1.111B Funcţiile $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) = \lambda x^2 + x + 1 - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

a) sunt crescătoare; b) sunt injective; c) sunt mărginite; d) au grafice ce trec toate printr-un acelaşi punct independent de λ; e) sunt pozitive; f) sunt surjective.

1.112B Pentru ce valori $\alpha \in \mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = \alpha \end{cases}$ are patru soluţii ?

a) $\alpha \in \{1\}$; b) $a \in \{\frac{1}{2}\}$; c) $a \in \{\frac{1}{3}\}$; d) $\alpha \in \{4\}$; e) $a \in \{\frac{1}{2}, 1\}$; f) $\alpha \in \{1, 3\}$.

1.113B Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6. \end{cases}$

a) (1,5); b) (4,2); c) (2,4); d) (4,2) şi (2,4); e) (1,5) şi (5,1); f) $(-1, -5)$.

1.114B Ordonaţi crescător numerele $x = 2 - \sqrt{3}$, $y = \sqrt{2} - 1$, $z = \sqrt{5} - 2$ este

a) x, y, z; b) x, z, y; c) y, x, z; d) y, z, x; e) z, x, y; f) z, y, x.

1.115B Numărul $P = \dfrac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$ este

a) 1/2; b) 1/4; c) un număr natural impar; d) un număr iraţional; e) un număr natural par; f) nici un alt răspuns nu este corect.

1.116B Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x - 1}$. Care afirmaţie este adevărată ?

a) f este inversabilă; b) f nu este injectivă; c) f nu este surjectivă; d) f este crescătoare; e) f este descrescătoare; f) f este o funcţie de gradul întâi.

1.117B Fie ecuaţia $m^2 x - m = mx - 1$. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$ ecuaţia are o singură soluţie şi aceasta este număr întreg ?

a) $m = 0$; b) $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$; c) $m = 1$; d) $m \in \{-1, 1\}$; e) $m = -1$; f) $m \in \varnothing$.

1.118B Fie, pentru orice $m \in \mathbb{R}$, ecuaţia $x^2 - (m + 2)x + m = 0$, cu soluţiile x_1 şi x_2. Să se determine toate valorile lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{x_1^2}{x_2} + \dfrac{x_2^2}{x_1} = -4$.

a) $m \in \mathbb{R}$; b) $m = -1$; c) $m \in \varnothing$; d) $m \in \{-1, 1\}$; e) $m \in \{-2, 1\}$; f) $m \in \{-2, 2\}$.

1.119B Determinaţi valorile parametrului real m pentru care soluţiile ecuaţiei $2mx^2 + 4(m + 1)x + 4m + 1 = 0$ sunt reale şi strict pozitive.

a) $m \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$; b) $m \in (0, 2]$; c) $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; d) $m \in (-1, 0)$; e) $m \in (-\infty, -\frac{1}{4}) \cup (0, \infty)$; f) $m \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.

1.120B Valorile $m \in \mathbb{R}$ pentru care $x^2 + y^2 - 2x - y - m \geq 0$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{R}$ sunt

a) $m \in (-\infty, -\frac{5}{4}]$; b) $m \in \varnothing$; c) $m \in (-\infty, -1)$; d) $m \in (-\frac{5}{4}, \infty)$; e) $m \in (-1, \infty)$; f) $m \in \mathbb{R}$.

1.121B Se dă sistemul $\begin{cases} x^2 - y^2 + xy = 2 \\ x^2 - 2xy = 2 \end{cases}$, cu soluţiile $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$. Dacă $A = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $B = \sum_{k=1}^{n} y_k$, atunci

a) $A = 1$, $B = 1 - \sqrt{2}$; b) $A = 0$, $B = 0$; c) $A = -1$, $B = 1 + \sqrt{2}$; d) $A = 1 - \sqrt{2}$, $B = 1$; e) $A = 1 + \sqrt{2}$, $B = -1$; f) sistemul nu are soluţii.

1.122B Aflaţi soluţiile reale ale sistemului $\begin{cases} x + y = a + b, \\ (ax + by)(bx + ay) = ab(a + b)^2, \end{cases}$ pentru $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.

a) $\{(a + b, 0), (0, a + b)\}$; b) $\{(a, b), (b, a)\}$; c) $\{(ab, 0), (0, ab)\}$; d) $\{(a(a + b), b(a + b)\}$; e) $\{(2a - b, 2b - a)\}$; f) $\{(a^2, b^2)\}$.

1.123B Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ ax^2 + bx, & x \geq 0 \end{cases}$. Atunci f este bijectivă dacă şi numai dacă

a) $b \geq 0, a > 0$ sau $a = 0, b > 0$; b) $b < 0, a > 0$ sau $a = 0, b > 0$; c) $b \leq 0, a > 0$; d) $a = 0, b > 0$; e) $b \leq 0, a > 0$ sau $a = 0, b \geq 0$; f) $b < 0, a \geq 0$.

1.124B Soluţia inecuaţiei $|||x| + 1| - 1| \leq 1$ este

a) $\{1\}$; b) $\{\pm 1\}$; c) $(-1, 1)$; d) $[-1, 1]$; e) $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$; f) $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.

1.125B Dacă x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - mx + m + 3 = 0$, atunci expresia $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + \dfrac{1}{x_1 x_2}$ este egală cu

a) $\frac{m^2 - m + 3}{m^2 + 6m + 9}$; b) $\frac{m^2 - m - 3}{m^2 + 6m + 9}$; c) $\frac{m^2 - m - 3}{m^2 + 3m + 9}$; d) $\frac{m^2}{(m+3)^2}$; e) $\frac{m^2 - m - 3}{m^2 + 9m + 9}$; f) $\frac{m^2 - m + 3}{m^2 + 2m + 1}$.

1.126B Aflaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $(m - 2)x^2 - 2x + (m - 2) = 0$ să admită două soluţii reale distincte.

a) $m \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$; b) $m \in (1, 3)$; c) $m \in [1, 3] \setminus \{2\}$; d) $m \in (1, 3) \setminus \{2\}$; e) $m \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$; f) $m \in [1, 3]$;

1.127B Coordonatele (x, y) ale vârfurilor parabolelor

$$\Gamma_m :\ y = mx^2 + 2(m - 1)x + m + 1,\ m \neq 0$$

verifică

a) $y = 2 - x$; b) $y = 2 - x$ şi $x \neq -1$; c) $y = x$ şi $x \neq 0$; d) $y = x$; e) $y = x - 1$ şi $x \neq 1$; f) $y = x - 1$.

1.128B Soluţiile sistemului $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x^2+y^2-5y=0 \end{cases}$ sunt

a) $\{(0,0)\}$; b) $\{(0,0),(-2,4)\}$; c) $\{(0,0),(2,4)\}$; d) $\{(2,4)\}$; e) $\{(0,0),(-2,-4)\}$; f) $\{(-2,-4)\}$.

1.129B Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=3x \quad g(x)=-x^2$ si $\quad a=(f\circ g)(1)$. Atunci

a) $(g\circ f)(x)=-3x^3$ şi $a=-3$; b) $(g\circ f)(x)=9x^2$ şi $a=-9$;
c) $(g\circ f)(x)=-9x^2$ şi $a=3$; d) $(g\circ f)(x)=-9x^2$ şi $(f\circ g)(1)=-3$;
e) $(g\circ f)(x)$ nu este definită, $a=3$; f) $(g\circ f)(x)=-9x^2$ şi $(f\circ g)(x)$ nu este definită.

1.130B Fie n numărul de soluţii reale al ecuaţiei $|x|-\dfrac{1}{2}x=3$. Atunci

a) $n=1$; b) $n=2$; c) $n=0$; d) $n=3$; e) $n^3=\sqrt{2}$; f) $n=4$.

1.131B Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât suma pătratelor soluţiilor ecuaţiei $x^2+(m-2)x-(m+3)=0$ să fie 25.

a) $m=0$; b) $m\in(0,1)$; c) $m\in\{5,-3\}$; d) $m\in\{1,2\}$; e) $m\in\varnothing$; f) $m=-2$.

1.132B Fie $A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+|x|-2\le 0\right\}$. Atunci

a) $A=[0,1]$; b) $A=[-1,1]$; c) $A=\varnothing$; d) $A=(-1,1)$; e) $A=(-2,0]$; f) $A=(0,2)$.

1.133B Câte soluţii are sistemul $\begin{cases} 2x^2+3xy+y^2=70 \\ 6x^2+xy-y^2=50 \end{cases}$?

a) 1; b) 2; c) 0; d) 3; e) 4; f) 6.

1.134B Pentru ca funcţia de gradul al doilea, $x^2-2(4m+3)x+6m+7$ să fie pătratul unui binom este suficient ca m să fie egal cu

a) -2; b) $\dfrac{2}{3}$; c) $-\dfrac{1}{8}$ sau -1; d) 1; e) $-\dfrac{1}{4}$; f) 2.

1.135B Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuaţia $(m^2+1)x^2-(2m+1)x+1=0$ are ambele soluţii în intervalul $(-\infty,1]$.

a) $m\ge\dfrac{3}{4}$; b) $m\in(-1,0)$; c) $m\in(0,\frac{3}{4})$; d) $m\in\{-1,0\}$; e) $m<0$; f) $m<\frac{3}{4}$.

1.136B Dacă $f(x)=\begin{cases} 2x-3, & x\le 0 \\ 7x & x>0 \end{cases}$ şi $g(x)=\begin{cases} x^2, & x\le -2 \\ 2x-1, & x>-2 \end{cases}$ atunci $h=g\circ f$ este

a) $h(x)=\begin{cases} (x-3)^2, & x\le 0 \\ 14x-1, & x>0 \end{cases}$; b) $h(x)=\begin{cases} (2x-3)^2, & x\le 0 \\ 14x-1, & x>0 \end{cases}$;

c) $h(x)=\begin{cases} (x-3)^2, & x>0 \\ 14x-1, & x\le 0 \end{cases}$; d) $h(x)=\begin{cases} 14x-1, & x>0 \\ (2x-1)^2 & x\le 0 \end{cases}$;

e) $h(x)=\begin{cases} (2x-3)^2, & x>0 \\ 14x-1, & x\le 0 \end{cases}$; f) $h(x)=\begin{cases} (x-2)^2, & x\le 0 \\ 14x-1, & x>0 \end{cases}$.

1.137B Soluţia ecuaţiei $1-x=|x+1|$ este

a) $x=-1$; b) $x=1$; c) $x=0$; d) $x=2$; e) $x=-2$; f) $x\in\varnothing$.

1.138B Să se determine mulţimea A a valorilor lui m pentru care amândouă soluţiile ecuaţiei $x^2-5x+m=0$, sunt în intervalul $(1,4)$.

a) $A=(1,2)$; b) $A=(-1,2)$; c) $A=(4,\frac{25}{4}]$;
d) $A=(2,\frac{25}{4})$; e) $A=(3,\frac{25}{4})$; f) $A=(4,\frac{21}{4})$.

1.139B Soluţia inecuaţiei $\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)<4$ este

a) $\varnothing$; b) $(-1,1)$; c) $(1,\infty)$; d) $(-\infty,1)$; e) $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$; f) $\{0,1,-1\}$.

1.14 B Dacă $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^4+3x^3+4$ şi $g(x)=x^3+x+2$, atunci

a) f nu este injectivă, iar g este injectivă; b) f este injectivă, g este injectivă; c) f este surjectivă, g nu este surjectivă; d) f nu este injectivă, g nu este injectivă; e) f este bijectivă, g este bijectivă; f) f este surjectivă, g este injectivă.

1.141B Să se rezolve inecuaţia $|x-3|>x-1$.

a) $x\in(-\infty,1)$; b) $x\in(1,3]$; c) $x\in(-\infty,2)$; d) $x\in(1,2)$; e) $x\in(2,3)$; f) $x\in[3,\infty)$.

1.142B Să se determine parametrul real m astfel încât ecuaţiile $x^2+mx+1=0$ şi $x^2+x+m=0$ să aibă exact o soluţie reală comună.

a) $m=-2$; b) $m=2$; c) $m\in\{-2,2\}$; d) $m\in\mathbb{R}$; e) $m\in\varnothing$; f) $m=1$.

1.143B Aflaţi funcţia de gradul al doilea $f(x)=ax^2+bx+c$, ştiind că admite un minim egal cu 9 şi graficul funcţiei trece prin punctele $A(-1,13)$ şi $B(2,10)$.

a) $f(x)=x^2-2x+10$; b) $f(x)=\frac{1}{9}x^2-\frac{10}{9}x+\frac{106}{9}$; c) $f(x)=2x^2+5x+7$;
d) nu există f; e) $f(x)=x^2-2x+10$ sau $f(x)=\frac{1}{9}x^2-\frac{10}{9}x+\frac{106}{9}$;
f) $f(x)=x^2+2x-10$.

1.144B Să se rezolve sistemul $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{16}. \end{cases}$

a) $(4,16),(16,4)$; b) $(4,16)$; c) $(16,4)$; d) $(4,4)$; e) $(16,16)$; f) $(16,2)$.

1.145C Să se afle valorile $n \in \mathbb{Z}$ pentru care expresia $E = \sqrt[n+1]{\sqrt[4-n]{n^2+n+1}}$ are sens.

a) 0 şi 1; b) 1 şi 2; c) 0, 1 şi 2; d) 0 şi 2; e) E are sens pentru nici o valoare $n \in \mathbb{Z}$; f) nici unul dintre răspunsurile precedente nu este corect.

1.146C Fie funcţiile $f, g, h : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $h(x) = -\frac{1}{x}$. Care dintre relaţiile următoare este adevărată ?

a) $f \circ f = g$; b) $f \circ f = h$; c) $g \circ g = f$; d) $g \circ g = h$; e) $h \circ h = f$; f) $h \circ h = g$.

1.147C Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru ca funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax+2, & x \leq 1 \\ x+2a, & x > 1 \end{cases}$$

să fie injectivă.

a) $a \leq 0$; b) $a \geq 0$; c) $a \leq 1$; d) $a \geq 1$; e) $a \leq 2$; f) $a \geq 2$.

1.148C Să se rezolve ecuaţia $f(f(x)) = 1$, dacă $f(x) = \dfrac{m+nx}{n+mx}, n \neq m$.

a) 1; b) $\frac{m}{n}$; c) $-\frac{n}{m}$; d) $\frac{n}{m}$; e) $-\frac{m}{n}$; f) $\frac{1}{m+n}$.

1.149C Fie funcţiile $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$g(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11, & x \geq 3 \\ x - 1, & x < 3 \end{cases}$. Avem

a) f şi g sunt monoton descrescătoare; b) $f([0,1]) = [-1, 1]$; c) $f^{-1}(4) = g(4)$; d) $g([0,4]) = [1,3]$; e) g nu este inversabilă; f) $g^{-1}(3) = 4$.

1.150C Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x+2$. Să se rezolve ecuaţia $f(x) \cdot f^{-1}(x) = 1$.

a) $x = -1$; b) $x \in \{-1, \frac{7}{3}\}$; c) $x = -\frac{7}{3}$; d) nu are soluţii; e) $x = 1$; f) $x \in \{1, -\frac{7}{3}\}$.

1.151C Fie Δ, P şi S, respectiv, discriminantul, produsul şi suma soluţiilor ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Dacă a, Δ, P, S sunt, în această ordine, numere întregi consecutive stabiliţi valoarea produsului abc.

a) 3; b) 2; c) 4; d) -10; e) 1; f) -1.

1.152C Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + 2$, $g(x) = 3x + m$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) \leq g(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

a) $m = 3$; b) $m = 2$; c) $m \in [2, 3)$; d) nu există; e) $m = 0$; f) $m \in [3, \infty)$.

1.153C Soluţiile ecuaţiei $\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x} = 1$ sunt

a) $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; b) $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; c) $x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; d) $x_1 = 2$; e) $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, x_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$; f) nu are soluţie.

1.154C Dacă $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \neq 0, \beta^2 + \alpha < 0$ atunci ecuaţia $ax^2 + bx + \alpha a + \beta b = 0$ are soluţiile

a) reale şi distincte; b) reale şi egale; c) complexe; d) opuse; e) inverse; f) independente de a.

1.155C Să se afle valorile $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + z^2 - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ admite soluţie reală unică.

a) $m = 0$; b) $m \in \varnothing$; c) $m = -1$; d) $m = 1$; e) $m = 1/2$; f) $m = -1/4$.

1.156C Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x + a}{x^2 + x + 1}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\operatorname{Im} f = [\frac{1}{3}, 3]$.

a) $a = 0$; b) $a = 2, a = 3$; c) $a = 1$; d) $a = -1$; e) $a = -1, a = 1$; f) $a = 2, a = 4$.

1.157C Ce relaţie trebuie să existe între $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ pentru ca funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax|x| + bx + c$ să fie bijectivă ?

a) $a \cdot b \geq 0$; b) $a \cdot b \leq 0$; c) $b^2 - 4ac > 0$; d) $b^2 - 4ac < 0$; e) $b^2 - 4ac = 0$; f) $a, b, c > 0$.

1.158C Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+ax+1}{x^2-x+1}$. Să se determine mulţimea $A = \{a \in \mathbb{R} | \operatorname{Im} f \subset [-3, 2]\}$, unde $\operatorname{Im} f$ este imaginea funcţiei f.

a) $A = [-1, 0]$, b) $A = \varnothing$; c) $A = [-4, -1]$; d) $A = \mathbb{R}$; e) $A = [-4, 0]$; f) $A = [-4, 11]$.

1.159C Să se determine soluţiile raţionale ale sistemului $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

a) $x = 1, y = -1$; b) $x = \dfrac{11+\sqrt{51}}{7}; y = \dfrac{-1-2\sqrt{51}}{7}$; c) $x = 2, y = 1$; d) $x = 2, y = -1$; e) $x = -1, y = 2$; f) nu există.

1.160C Fie funcţiile $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = 2n-1$ şi $g(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{dacă } n \text{ impar} \\ n, & \text{dacă } n \text{ par.} \end{cases}$
Care afirmaţie este adevărată ?

a) f este surjectivă; b) $g \circ f = 1_{N^*}$; c) $g^{-1} = f$; d) g este injectivă; e) $f \circ g = 1_N$; f) f este inversabilă.

1.161C Fie $a \in \mathbb{R}$ şi fie funcţia $f(x) = \begin{cases} ax-2, & x \leq 1 \\ x-2a, & x > 1. \end{cases}$

Să se determine toate valorile lui $a \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie injectivă.

a) $a = 1$; b) $a \in (0, 1]$; c) $a > 1$; d) $a \geq 1$; e) $a < 1$; f) $a \in \varnothing$.

1.162C Fie ecuaţia $(m+1)x^2 - (2m+1)x + m - 1 = 0$ şi fie mulţimile
$A = \{m \in \mathbb{R} |$ ecuaţia are două soluţii strict pozitive$\}$,
$B = \{m \in \mathbb{R} |$ ecuaţia are soluţii de acelaşi semn$\}$.
Care afirmaţie este adevărată ?

a) $A = (-\frac{1}{2}, \infty)$, $B = (\infty, -1) \cup (1, \infty)$; b) $A \cap B = (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$;
c) $A = (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, \infty)$, $B = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$;
d) $A \cap B = (-\frac{5}{4}, -1) \cup (1, \infty)$; e) $A \cup B = (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, \infty)$;
f) $A \cup B = (-\infty, -1) \cup [-\frac{1}{2}, \infty)$.

1.163C Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{mx^2 + x + m}{x^2 + 1}$ şi $A = \{m \in \mathbb{R} |\, \mathrm{Im}\, f = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]\}$. Atunci

a) $A = \{-1\}$; b) $A = \varnothing$; c) $A = \{1\}$; d) $A = \{-1, 1\}$; e) $A = \{0\}$;
f) $A = \{-1, 0, 1\}$.

1.164C Se dă sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ |x - y| = 1 \end{cases}$, cu soluţiile $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ şi fie $A = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $B = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k$. Atunci

a) $A = -2$, $B = -2$; b) $A = -1$, $B = -1$; c) $A = 2$, $B = 2$; d) $A = 0$, $B = 0$;
e) $A = 1$, $B = 1$; f) $A = 1 - \sqrt{2}$, $B = 1 - \sqrt{2}$.

1.165C Să se rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{1331_{(x)}} + \sqrt{121_{(y)}} = 9$, unde indicele inferior reprezintă baza de numeraţie în care este exprimat numărul indexat.

a) $x = 3, y = 3$; b) $x = 3, y = 4$; c) $x = 4, y = 3$; d) $x = 4, y = 5$;
e) $x = 5, y = 4$; f) $x = 6, y = 3$.

1.166C Soluţiile inecuaţiei $\left(a\dfrac{x}{y} + b\right)^2 + \left(a\dfrac{y}{x} + b\right)^2 \geq 2(a+b)^2$, $x, y > 0$, unde $a, b > 0$, sunt

a) $x = y = 1$; b) $x, y \in \mathbb{R}_+^*$; c) $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$; d) $x, y \in \mathbb{N}$; e) $x \geq 1, y \geq 1$;
f) $x = y > 0$.

1.167C Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x^2 + y^2 - 2[a(x+y) + b(x-y) - (c^2 + d^2)] = 0$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât $ab = cd, a + c = b + d, bc \neq 0$.

a) $x = a, y = b$; b) $x = b, y = a$; c) $x = a - b, y = a + b$; d) $x = a + b, y = a - b$;
e) $x = a + c, y = b + d$; f) $x = a - c, y = b - d$.

1.168C Aflaţi minimul expresiei

$$E(x, y) = 4x^2 + 12xy + 10y^2 - 20x - 32y + 33, x, y \in \mathbb{R}.$$

a) 3; b) 4; c) 5; d) 6; e) 7; f) 0.

1.169C Aflaţi parametrul $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{xy}{x+y} < 0$, unde (x, y) este o soluţie oarecare a sistemului $\begin{cases} x^3 + y^3 - 2(x+y) = 25a \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$

a) $a < 0$; b) $a > 0$; c) $a \in (0, \frac{\sqrt{7}}{5})$; d) $a \in (-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{5}) \cup (\frac{\sqrt{7}}{5}, \infty)$;
e) $a \in (-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{5}) \cup (1, \infty)$; f) $a \in (-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{5}) \cup (0, \frac{\sqrt{7}}{5})$.

1.170C Fie $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ şi $\alpha = \sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}}$. Atunci

a) $\alpha \notin A$; b) $\alpha \in A$; c) $\alpha^2 = 1$; d) $\alpha^3 = 1$; e) $\alpha < 0$; f) $\alpha > 1$.

1.17 C Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$ şi $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Fie A mulţimea valorilor funcţiei f şi $\mathbb{I}$ mulţimea numerelor iraţionale. Atunci

a) $A \cap \mathbb{I} = \varnothing$; b) $A \cap \mathbb{I} = A$; c) $A \cap \mathbb{I} = \mathbb{I}$; d) $A \cap \mathbb{I} = \{0\}$; e) $A \cap \mathbb{I} = (0, +\infty)$;
f) $A \cap \mathbb{I} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y = a + b\sqrt{2}\ a, b \in \mathbb{Q}\right\}$.

1.172C Să se găsească maximul sumei $x_0 + y_0 + z_0$, unde (x_0, y_0, z_0) este soluţie reală a sistemului $\begin{cases} 2x = y + \frac{2}{y}, \\ 2y = z + \frac{2}{z}, \\ 2z = x + \frac{2}{x}. \end{cases}$

a) 3; b) $3\sqrt{2}$; c) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; d) 12; e) $\frac{5}{2}$; f) nu există.

1.173C Dacă ecuaţia $x^2 - |x| + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$, are trei soluţii reale distincte, atunci

a) $m < \frac{1}{4}$; b) $m \leq \frac{1}{4}$; c) $m \in [0, \frac{1}{4})$; d) $m = 0$; e) $m \in (-1, 1)$;
f) nu există astfel de m.

1.174C Numerele $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ au proprietatea că există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 x_2 = \alpha$ şi $|x_1 - x_2| = \beta$. Atunci

a) $\alpha \geq \beta$; b) $4\alpha - \beta^2 \leq 0$; c) $\beta^2 + 4\alpha \geq 0$; d) $\beta^2 - 4\alpha \geq 0$; e) $\beta^2 \geq \alpha$; f) $\alpha = \beta$.

1.175C Determinaţi câte perechi de numere raţionale (x, y) satisfac egalităţile

$$xy = x + y = x^2 - y^2.$$

a) una; b) două; c) nici una; d) trei; e) patru; f) cinci.

1.176C Câte soluţii distincte $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, are ecuaţia $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$?

a) 4; b) 5; c) 3; d) 6; e) 7; f) 8.

1.177C Nici un număr de forma $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ cifre}}$, $n \geq 2$, nu este

a) întreg; b) raţional; c) divizibil cu 3; d) pătratul unui întreg; e) mai mic decât 10^n; f) divizibil cu 37.

1.178C Fie m şi n două numere naturale. Împărţind m^2+n^2 la $m+n$ obţinem câtul q şi restul r. Să se determine toate perechile (m,n) pentru care avem $q^2 + r = 17$.

a) $(2,5), (5,2)$; b) $(1,2), (2,1)$; c) $(2,4), (4,2)$; d) $(3,4)$; e) $(1,5), (5,1)$; f) $(2,2)$.

1.179C Soluţia inecuaţiei $||x+1|-1| \leq 3$ este

a) $[-1,1]\cup[2,3]$; b) $[-5,-3]\cup[-2,3]$; c) $[-3,3]$; d) $[-5,3]$; e) $[-4,2]$; f) $[-2,2]$.

1.180C Inversa $g = f^{-1}$ a funcţiei $f(x) = \begin{cases} -x^2+1, & x \leq -1 \\ 2x+3 & x > -1 \end{cases}$ este

a) $g(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x}, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(x-3) & x > 1 \end{cases}$; b) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(x-3) & x > 1 \end{cases}$;
c) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x > 1 \\ \frac{1}{2}(x-3) & x \leq 1 \end{cases}$; d) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x > 1 \\ \frac{1}{2}(3-x) & x \leq 1 \end{cases}$;
e) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x > -1 \\ \frac{1}{2}(x+3) & x < -1 \end{cases}$; f) $g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x+1}, & x > 1 \\ \frac{1}{2}(x+3) & x \leq -1 \end{cases}$.

1.181C Graficele funcţiilor de gradul al doilea

$$f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + (m+2), \quad m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

au următoarea proprietate

a) nu au nici un punct comun; b) au două puncte comune; c) sunt tangente toate în $M_0(-1,0)$; d) trec toate prin $M_0(-1,0)$ fără a fi tangente; e) numai două dintre ele sunt tangente în $M_0(-1,0)$; f) toate afirmaţiile anterioare sunt false.

1.182C Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\{x \in \mathbb{R} | mx^2 + (5m-3)x + 13m + 15 = 0\} \cap [-1,2] \neq \varnothing .$$

a) $m \in [-2, -\frac{1}{3}]$; b) $m \in \mathbb{R}$; c) $m \in (0,1)$; d) $\varnothing$; e) $m \in (-3,0)$; f) $m \in [-2, -\frac{1}{3})$.

1.183C Să se determine parametrii reali a şi b, astfel încât $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, să îndeplinească condiţia $f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$.

a) $a = 1, b = 1$; b) $a = 0, b \in \mathbb{R}$; c) $a = 1, b = 0$;
d) $a = 1, b = 0$ sau $a = -1, b \in \mathbb{R}$; e) $a = -1, b \in \mathbb{R}$; f) $a = 1, b \in \mathbb{R}$.

1.184C Să se rezolve ecuaţia $\left[\frac{x+1}{3}\right] = \frac{x-1}{2}$; prin $[\ ]$ s-a notat funcţia "parte întreagă".

a) $x = 1$; b) $x = 3$; c) $x = 5$; d) $x \in \{3,5\}$; e) $x \in \{1,3\}$; f) $x \in \{1,3,5\}$.

1.185C Ecuaţia $x^2 - 2|x| = 0$ are

a) două soluţii; b) o soluţie; c) patru soluţii; d) nici o soluţie; e) trei soluţii; f) o infinitate de soluţii.

1.186C Pentru ce valori ale parametrului real m, sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = m \end{cases}$$

are o soluţie reală unică ?

a) $m \in \mathbb{R}$; b) $m = \frac{1}{2}$; c) $m = 0$; d) $m = -\frac{1}{2}$; e) $m \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$; f) $m \in (0, \frac{1}{2})$.

1.187C Să se calculeze suma $S = x + y + u + v$, ştiind că x, y, u, v verifică sistemul

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xu + yv = -1 \\ xu^2 + yv^2 = 3 \\ xu^3 + yv^3 = -1. \end{cases}$$

a) $S = 3$; b) $S = 0$; c) $S = 1$; d) $S = -1$; e) $S = 2$; f) $S = -3$.

1.2 Funcţia exponenţială şi funcţia logaritmică

1.188A Soluţiile ecuaţiei $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x = 10$ sunt

a) $\{\pm 1\}$; b) $\{\pm 2\}$; c) $\{\pm\sqrt{2}\}$; d) $\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}$; e) $\{\pm\frac{1}{2}\}$; f) $\{\pm 4\}$.

1.189A Numărul soluţiilor ecuaţiei $3^{|x|} + 4^{|x|} + 5^{|x|} = 12$ este

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5; f) 0.

1.190A Să se rezolve ecuaţia $3\lg^2(x^2) - \lg x - 1 = 0$.

a) $x_{1,2} = \pm\sqrt[3]{10}$; b) $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{10}$; c) $x_1 = \sqrt[3]{10}, x_2 = \sqrt[4]{10^{-1}}$;
d) $x_1 = \sqrt[3]{10}, x_2 = \sqrt[4]{10}$; e) nu admite soluţii; f) afirmaţiile precedente sunt false.

1.191A Să se rezolve ecuaţia $\log_2 x + \log_3 x = 1$.

a) $x = 10^{\lg 6}$; b) $x = 10^{\lg 2}$; c) $x = 10^{\lg 3}$; d) $x = 10^{\frac{\lg 2 \cdot \lg 3}{\lg 6}}$; e) nu are soluţii; f) afirmaţiile precedente sunt false.

1.192A Să se rezolve ecuaţia $\log_{x+2} x + \log_x (x+2) = \dfrac{5}{2}$.

a) $x = 2$; b) $x = \frac{1}{2}$; c) $x = \pm\frac{1}{2}$; d) $x = \sqrt{2}$; e) nu admite soluţii; f) afirmaţiile precedente sunt false.

1.193A Să se rezolve ecuaţia $16^{|x|} - 2 \cdot 4^{|x|} - 8 = 0$.

a) $x \in \{-1/2, 1/2\}$; b) $x \in \{-1, 1\}$; c) $x \in \{1/2, 1\}$; d) $x = 1$; e) $x = 1/2$; f) $x \in \{-1, -1/2, 1/2, 1\}$.

1.194A Să se rezolve inecuaţia $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 < 0$.

a) $x \in (2,3)$; b) $x \in (0,2) \cup (3,\infty)$; c) $x \in (\frac{\ln 2}{\ln 3}, 1)$; d) $x \in (1,\infty)$; e) $x = 2$; f) $x = 3$.

1.195A Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{4^x - 2^{x+1} + 1} = 2^x - 1$.

a) $x = -1$; b) $x = 0$; c) $x \in \{0,1\}$; d) $x = -4$; e) $x > 0$; f) $x \geq 0$.

1.196A Să se rezolve ecuaţia $\dfrac{1}{2^x - 1} > \dfrac{1}{1 - 2^{x-1}}$.

a) $x \in (0, \log_2 \frac{4}{3}) \cup (1,\infty)$; b) $x \in [0, \log_2 \frac{4}{3}]$; c) $x \in [0, \log_2 \frac{4}{3}] \cup [1,\infty)$; d) $x \in (0, \log_2 \frac{4}{3})$; e) $x \in (1,\infty)$; f) $x \in [1,\infty)$.

1.197A Să se rezolve inecuaţia $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x \geq 4$.

a) $|x| \geq 1$; b) $x = 1$; c) $x = -1$; d) $x = \pm 1$; e) $x \geq 1$; f) $x \leq -1$.

1.198A Să se rezolve inecuaţia $(2x^2 - x + 1)^{x+1} > 1$.

a) $x \in (0,\infty)$; b) $x \in (-1,0)$; c) $x \in (-1,0) \cup (1/2,\infty)$; d) $x \in (1/2,\infty)$; e) $x \in (-1,\infty)$; f) $x \in (-1,0) \cup (1/2,1)$.

1.199A Domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{4}{x}\right)$ este

a) $D = (0,\infty)$; b) $D = (-\infty,-8) \cup (0,\infty)$; c) $D = (-\infty,-4) \cup (0,\infty)$; d) $D = (-\infty,-8)$; e) $D = \mathbb{R}^*$; f) $D = (-\infty,-4)$.

1.200A Cea mai mare valoare pe care o poate lua funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\log_3 x)^2 + 2(\log_3 x) \cdot (\log_3 \frac{9}{x})$ este

a) 100; b) 10; c) 1; d) 4; e) 9; f) 64.

1.201A Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care inegalitatea $\log_{\frac{m-1}{m+1}}(x^2+3) \geq 1$ este adevărată pentru orice x real.

a) $m \in (-\infty,-1)$; b) $m \in (1,\infty)$; c) $m \in (-1,1)$; d) $m \in (\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e})$; e) $m \in (-\infty,-2]$; f) $m \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

1.202A Inecuaţia $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 + x}{x^2 + 2} < 0$ are soluţia

a) $x \in (-\infty,-2)$; b) $x \in (-2,1)$; c) $x \in (1,\infty)$; d) $x \in (-\infty,-2] \cup [1,\infty)$; e) $x \in [-2,-1]$; f) $x \in (-\infty,-2) \cup (1,\infty)$.

1.203A Produsul soluţiilor ecuaţiei $x^{\log_2 x - 2} = 256$ este

a) 4; b) −7; c) 12; d) 3; e) 9; f) 14.

1.204A Soluţia ecuaţiei $\log_3 x + \log_5 x = 1$ verifică relaţia

a) $\ln x = \frac{\ln 3 - \ln 5}{\ln 5 \ln 3}$; b) $\ln x = \frac{\ln 3 - \ln 5}{\ln 5 + \ln 3}$; c) $\ln x = \frac{\ln 3 \ln 5}{\ln 5 + \ln 3}$; d) $\ln x = \frac{\ln 3 \ln 5}{\ln 5 - \ln 3}$; e) $\ln x = \frac{\ln 3 + \ln 5}{\ln 5 \ln 3}$; f) $\ln x = \frac{\ln 3 + \ln 5}{\ln 5 - \ln 3}$.

1.205A Soluţia sistemului $\begin{cases} x^2 + 16y^2 = 17 \\ \log_2 x - \log_4 y = 3 \end{cases}$ verifică relaţia

a) $xy = 2$; b) $xy = 4$; c) $xy = 1$; d) $xy = 8$; e) $xy = 16$; f) $xy = 32$.

1.206A Soluţiile ecuaţiei $\ln^2 x - 4 \ln x + 3 = 0$ sunt

a) $x_1 = 1, x_2 = 3$; b) $x_1 = \mathrm{e}^{-1}, x_2 = \mathrm{e}^{-3}$; c) $x_1 = \mathrm{e}, x_2 = \mathrm{e}^3$; d) $x_1 = \mathrm{e}^{-1}, x_2 = \mathrm{e}^3$; e) $x_1 = -1, x_2 = -3$; f) $x_1 = \mathrm{e}, x_2 = \mathrm{e}^{-3}$.

1.207A Fie $\alpha = \log_{40} 100$ şi $\beta = \log_{10} 20$. Decideţi:

a) $\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}$; b) $\beta = \frac{1-\alpha}{\alpha}$; c) $\beta = \frac{1+\alpha}{2\alpha}$; d) $\beta = \frac{2\alpha-1}{\alpha+1}$; e) $\beta = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$; f) $\beta = \frac{\alpha+2}{\alpha}$.

1.208A Soluţia inegalităţii $3^x + 4^x + 5^x < 6^x$ este

a) $x > 1$; b) $x < \sqrt{3}$; c) $x < 2$; d) $x > 3$; e) $x < 3$; f) $x > \sqrt{3}$.

1.209A Să se rezolve ecuaţia $3^{x+1} = 9^{\sqrt{x}}$.

a) $x = 4$; b) $x = \pm 1$; c) $x = 3$; d) $x = 1$; e) ecuaţia nu are soluţii; f) $x = -1$.

1.210A Să se rezolve ecuaţia $2^{3x} - 2^{x+1} - 4 = 0$.

a) $x = 0$; b) $x = -1$; c) $x = 1$; d) $x = \frac{3}{2}$; e) nu are soluţii; f) $x = \frac{1}{2}$.

1.211A Să se rezolve inecuaţia $3^{\log_{\frac{1}{2}} x} > 1$.

a) $x \in \varnothing$; b) $x \in (0,1)$; c) $x \in (1,\infty)$; d) $x \in (1,3)$; e) $x \in (0,3)$; f) $x \in \mathbb{R}$.

1.212A Să se rezolve ecuaţia $x^{\log_{x^2}(x^2-1)} = 8$.

a) $\sqrt{32}$; b) 2; c) 4; d) $\sqrt{65}$; e) $-\sqrt{65}$; f) 3.

1.213A Să se determine toate soluţiile inecuaţiei $\ln e^x + e^{\ln x} < 2$.
a) $x < 1$; b) $x \in (0,1)$; c) $x \in (0,e)$; d) $x > 0$; e) $x \in (0,1/2)$; f) $x > 1$.

1.214A Produsul soluţiilor ecuaţiei $\log_4^2(x+1) - 3\log_2(2x+2) = \frac{33}{4}$ este
a) $\frac{7}{8}(2^{12}-1)$; b) 0; c) $7(2^{-3}-2^{12})$; d) $-\frac{7}{8}(2^{12}-1)$; e) $7(2^{10}-1)$; f) 1.

1.215A Soluţia ecuaţiei logaritmice $\log_{|x|} 2 = 2$ este
a) $x = 2$; b) $x = \pm 2$; c) $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$; d) $x = \sqrt{2}$; e) $x = -2$; f) $x = -\sqrt{2}$.

1.216A Fie n numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $(7^x - 3)(7^x + 1) = 0$. Atunci
a) $\lg n = 2$; b) $\lg n = -1$; c) $\lg n = 0$; d) $\lg n = 1$; e) $10^n = 2$; f) $\lg n = -2$.

1.217A Soluţiile ecuaţiei $x^{\lg x} = 100x$, (unde $\lg x = \log_{10} x$) sunt
a) $\{-1,2\}$; b) $\{1,2\}$; c) $\{10^{-1}, 10^2\}$; d) $\{10,100\}$; e) $\{1,10\}$; f) $\{2,3\}$

1.218A Să se rezolve ecuaţia $\log_{16}(x-2) + \log_2 5 = 10$.
a) $2 + \dfrac{16^{10}}{5^4}$; b) 3; c) 4; d) $2 + \dfrac{16^5}{5^2}$; e) $\dfrac{36}{5}$; f) $\dfrac{12}{5}$.

1.219A Fie $a \in (0,1)$ şi numerele $m = a^{1+\sqrt{6}}$, $n = a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. Atunci
a) $m > n$; b) $m+n = 2$; c) $m+n > 2$; d) $m < n$; e) $m = n$; f) $m^{1+\sqrt{6}} = n^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

1.220B Să se determine valorile parametrului real m pentru care
$$\{x \in \mathbb{R} \mid (m-1)e^x + 2m + me^{-x} > 0\} = \mathbb{R}.$$
a) $m \in (1,\infty)$; b) $m \in [1,\infty)$; c) $m \in (-\infty,0) \cup [1,\infty)$; d) $\varnothing$; e) $m \in (-\infty,0]$; f) $m \in (0,1)$.

1.221B Fie M mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $3^{x+3} + 9 = \sqrt{81^{2x-1}} + 3^{4x}$ şi k numărul elementelor lui M. Atunci
a) $M = \varnothing$; b) $k = 1$; c) $k = 2$; d) $k = 3$; e) $k = 4$; f) $k = 5$.

1.222B Fie $M = \{x \in (0,\infty) \mid 3^{\log_6 x} + 4^{\log_6 x} + 5^{\log_6 x} = x\}$. Decideţi:
a) $M = \varnothing$; b) $M \subset (0,60)$; c) $M \subset (60,100)$; d) $M \subset (100,200)$;
e) $M \subset (200,300)$; f) $M \subset (300,\infty)$.

1.223B Se consideră sistemul $\begin{cases} x^{y^2-3y+3} = x \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ şi fie A mulţimea perechilor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ care verifică sistemul. Dacă $S = \sum\limits_{(x,y)\in A} (x^2+y^2)$, atunci
a) $S = 15$; b) $S = \frac{85}{4}$; c) $S = 25$; d) $S = 32$; e) $S = 40$; f) $S = \frac{125}{4}$.

1.224B Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4^x - 6^x + 9^x}{4^x + 6^x + 9^x}$. Notăm $I = f(\mathbb{R})$. Atunci
a) $I = [0,1]$; b) $I = [\frac{1}{3}, 3]$; c) $I = [\frac{1}{3}, 1)$; d) $[\frac{1}{3}, \infty)$; e) $I = (-1,1)$; f) $I = (0,1)$.

1.225B Fie $a > 0$ şi $M = \left\{x \in \mathbb{R} \mid a^{\sqrt{x}} \geq a^{2-x}\right\}$. Decideţi:
a) $(\exists)\, a > 0$ pentru care $M = \varnothing$; b) M este nemărginită $(\forall)\, a > 0$;
c) $(\exists)\, a > 0$ pentru care M nu este interval; d) $2 \in M$, $(\forall)\, a > 0$;
e) M este interval închis $(\forall)\, a > 0$; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

1.226B Fie p suma soluţiilor ecuaţiei $(3x-1)^{x^2} = (3x-1)^{2x+3}$. Atunci
a) $p = 2$; b) $p = \frac{8}{3}$; c) $p = 0$; d) $p = \frac{7}{3}$; e) $p = 4$; f) $p = 3$.

1.227B Fie S suma soluţiilor ecuaţiei $6^x + 8^x + 15^x = 9^x + 12^x + 10^x$. Decideţi:
a) $S \in (0,1]$; b) $S \in (2,3]$; c) $S \in (1, \frac{3}{2}]$; d) $S \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$; e) $S \in (\frac{5}{2}, 3)$; f) $S \geq 3$.

1.228B Fie $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x + 1 < 3\log_3(x+5)\}$ şi fie $m \in \mathbb{N}$ numărul elementelor lui M. Avem:
a) $m = 6$; b) $m = 7$; c) $m = 10$; d) $m = 9$; e) $m = 8$; f) $m = 0$.

1.229B Fie ecuaţia
$$(\log_x 6)^2 + \left(\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 + \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(\frac{1}{6}\right) + \log_{\sqrt{6}} x + \frac{3}{4} = 0$$
şi fie S suma inverselor soluţiilor ecuaţiei. Atunci
a) $S \in (10,20]$; b) $S \in (38,39)$; c) $S \in (1,7]$; d) $S \in (\frac{13}{2}, \frac{25}{2}]$; e) $S \in (6,7)$;
f) $S \geq 39$.

1.230B Soluţia inecuaţiei $2(\sqrt{3}+1)^{-x} + 2^x(2+\sqrt{3})^x > 3$ este
a) $(-\infty, \ln(\sqrt{3}+1))$; b) $\varnothing$; c) $(0,\infty)$; d) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; e) $[\ln(\sqrt{3}+1), \infty)$; f) $(-1,1)$.

1.231B Să se rezolve inecuaţia $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10-6x-x^3} < \dfrac{27}{64}$.
a) $x \in (-\infty,-1)$; b) $x \in \varnothing$; c) $x \in (-1,1)$; d) $x < 1$; e) $x > 1$; f) $x \in (0,1)$.

1.232B Fie funcţiile $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (\frac{1}{5})^x$, $h = g \circ f$. Atunci
a) f, g, h sunt crescătoare; b) f, g, h sunt descrescătoare; c) f, g sunt crescătoare, h este descrescătoare; d) f, g sunt descrescătoare, h este crescătoare; e) f, h sunt descrescătoare, g este crescătoare; f) g, h sunt descrescătoare, f este crescătoare.

1.233B Să se afle toate valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + a = 0$ are două soluţii distincte.

a) $a < \frac{9}{4}$; b) $a > 0$; c) $0 < a < \frac{9}{4}$; d) $0 < a < \frac{3}{4}$; e) $0 \leq a < \frac{1}{4}$; f) $\frac{9}{4} < a$.

1.234B Să se rezolve inecuaţia $\log_4 x + \log_x 4 < \frac{5}{2}$.

a) $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, 2)$; b) $(2, 16)$; c) $[2, 16)$; d) $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$; e) $(-\infty, 0) \cup (16, \infty)$; f) $x \in (0, 1) \cup (2, 16)$.

1.235B Să se rezolve inecuaţia $\log_x(3x) \leq 2$.

a) $x \in (0, 1) \cup [3, \infty)$; b) $x \in (3, \infty)$; c) $x = 3$; d) $x \in (0, 3)$; e) $x = 1$; f) $x \in (0, 1)$.

1.236B Fie ecuaţia $4^x - (m + 1)2^x + m = 0$ şi fie $A = \{m \in \mathbb{R} |$ ecuaţia are exact o soluţie reală$\}$. Care afirmaţie este adevărată ?

a) $A = (0, \infty)$; b) $A = \{1\}$; c) $A = \mathbb{R}$; d) $A = [0, \infty)$; e) $A = (-\infty, 0)$; f) $A = (-\infty, 0] \cup \{1\}$.

1.237B Soluţia ecuaţiei $9 \cdot 3^{2x} + 9 \cdot 3^x = 810$ este

a) 1; b) $\ln 2$; c) $\ln(15/2)$; d) 2; e) $\log_3 6$; f) 3.

1.238B Determinaţi mulţimea $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \log_9^2 x \geq \log_3^2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}} \right\}$.

a) $A = (0, \frac{4}{5})$; b) $A = (0, 4)$; c) $A = (0, 4) \setminus \{2\}$; d) $A = (0, 2]$; e) $A = (0, \frac{4}{5}] \cup \{2\}$; f) $A = \varnothing$.

1.239B Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3^x - 4}{3^x + 2}$. Atunci mulţimea valorilor lui f este

a) $\mathbb{R}$; b) $(-2, 1)$; c) $(0, \infty)$; d) $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$; e) $(-1, 1)$; f) $[-2, 1)$.

1.240B Fie $A \subset \mathbb{R}$ mulţimea soluţiilor inecuaţiei $2^{\sqrt{4-x}} < 4^{x/2}$; avem

a) $A = (-\infty, \frac{-1+\sqrt{17}}{2})$; b) $A = (0, \infty)$; c) $A = (\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, 4]$; d) $A = (0, 4)$; e) $A = (-\infty, 4)$; f) $A = (\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \infty)$.

1.241B Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $2^{3x-1} + 2^{3(2-x)} - 33 < 0$.

a) $x \in (\frac{1}{4}, 5)$; b) $x \in (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (2, \infty)$; c) $\varnothing$; d) $x \in (-\frac{2}{3}, 1)$; e) $x \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (1, \infty)$; f) $x \in (\frac{1}{3}, 2)$.

1.242B Care sunt soluţiile ecuaţiei $3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x-1} - 7 \cdot 3^x + 21 = 0$?

a) $x = 4$; b) $x \in \{1, 2\}$; c) $x \in \{2, 3\}$; d) $x = 3$; e) $x = 2$; f) $x \in \varnothing$.

1.243C Dacă $x \in (0, \infty) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ şi $a = \log_2 x$, $b = \log_{2x} 2$, atunci

a) $b(1 + a) = 1$; b) $a(1 + b) = 1$; c) $2b(1 + 2a) = 1$; d) $ab = 4$; e) $2a(1 + 3b) = 2$; f) $2a + 3b = 1$.

1.244C Fie $E(x) = \log_x(x - 1) + \log_{x-1} x + 2$. Calculaţi $E\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{3} - 1$; c) $\sqrt{5}$; d) 0; e) $\sqrt{2}$; f) $\sqrt{5} - 1$.

1.245C Să se rezolve ecuaţia $2^{\sqrt{x-2}} + 3^{\sqrt{x^2-4}} + 4^{\sqrt{x^2-x-2}} = 3$.

a) $x = 2$; b) $x = \pm 2$; c) nu are soluţii; d) $x \in [2, \infty)$; e) $x = -1$; f) $x \in (-1, 2]$.

1.246C Se consideră ecuaţia $(m - 2)4^x + (2m - 3)2^{x+1} + 5m - 6 = 0$, cu $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Determinaţi mulţimea valorilor lui m pentru care ecuaţia dată are o singură soluţie reală.

a) $(1, \frac{6}{5})$; b) $(\frac{6}{5}, 2)$; c) $\{1, 3\}$; d) $\varnothing$; e) $(\frac{5-\sqrt{13}}{4}, \frac{5+\sqrt{13}}{4})$; f) $(\frac{3}{2}, 2)$.

1.247C Fie $0 < a < b < 1$ şi $E = \log_a \dfrac{2ab}{a+b} + \log_b \dfrac{2ab}{a+b}$. Să se precizeze care dintre afirmaţiile următoare este adevărată.

a) $E < 2$; b) $E \leq 2$; c) $E \geq 2$; d) $E < 0$; e) $\cancel{E = 2}$; f) $E > 0$.

$E<2$ $E>2$

1.248C Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $\sqrt{\log_2 \dfrac{3 - 2x}{1 - x}} < 1$

a) $(2, \infty)$; b) $[2, \infty)$; c) $\varnothing$; d) $(1, \infty)$; e) $(\frac{3}{2}, \infty)$; f) $[\frac{3}{2}, \infty)$.

1.249C Numărul de soluţii (x, y) ale sistemului $\begin{cases} 3^x + 4^y = 13 \\ \log_3 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$ este

a) 2; b) 1; c) 0; d) 3; e) 4; f) ≥ 5.

1.250C Se consideră mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Z} / 3x + 1 < 2\log_2(x + 4)\}$ şi fie S suma elementelor sale. Atunci

a) $S = -5$; b) $S = 0$; c) $S = 5$; d) $S = \infty$; e) $S = -6$; f) $S = 7$.

1.251C Fie $S = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} \log_2 k} + \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} \log_3 k} + \ldots + \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} \log_n k}$, $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Atunci

a) $S = -1$; b) $S = n!$; c) $S = 0$; d) $S = 1$; e) $S = \frac{1}{2}$; f) $S = -2$.

1.252C Fie $\alpha \neq 0$. Câte soluţii are sistemul $x^{2x+y} = y^{\alpha}$, $y^{2x+y} = x^{-\alpha}$, $x, y \in (1, \infty)$?

a) nu admite nici o soluţie; b) are cel puţin o soluţie; c) are cel puţin două soluţii; d) are soluţie unică; e) are o infinitate de soluţii; f) are soluţia $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

1.253C Inegalitatea $3^x + 4^x + 5^x \geq 6^x$ este verificată pentru orice $x \in A$, unde

a) $A = \mathbb{R}$; b) $A = \varnothing$; c) $A = (-\infty, 3)$; d) $A = (-\infty, 3]$; e) $A = (3, \infty)$; f) $A = [3, \infty)$.

1.254C Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt{\log_\alpha \alpha x + \log_x \alpha x} + \sqrt{\log_\alpha \frac{x}{\alpha} + \log_x \frac{\alpha}{x}} = 2\sqrt{\alpha},\ \alpha > 0,\ \alpha \neq 1.$$

a) Nu are soluţii pentru $\alpha < 1$ şi $x = \alpha^{1/\alpha}, x = \alpha^\alpha$ pentru $\alpha > 1$; b) $x = \alpha^\alpha$; c) $x = \alpha^\alpha$ pentru $\alpha > 1$ şi $x = \alpha^{1/\alpha}$ pentru $\alpha < 1$; d) $x = \alpha^{1/\alpha}$; e) $x = \alpha^{1/\alpha}$ pentru $\alpha > 1$ şi $x = \alpha^\alpha$ pentru $\alpha < 1$; f) $x = \sqrt{\alpha}$.

1.255C Rezolvaţi inecuaţia logaritmică $\log_{1/2}(x^2 - 3) > \log_{1/2}(x + 3)$.

a) $x \in (-\sqrt{3}, 3)$; b) $x \in (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$; c) $x \in (-2, -\sqrt{3})$; d) $x \in (\sqrt{3}, 3)$; e) $x \in (-2, 3)$; f) $x \in (-2, \sqrt{3})$.

1.256C Să se rezolve inecuaţia $\log_{2^x}(2^{2x} + |x|) > 2$.

a) $x \in (0, 1)$; b) $x \in (1, \infty)$; c) $x \in \mathbb{R}^*$; d) $x \in \mathbb{R}$; e) $x \in (-\infty, 0)$; f) $x \in (0, \infty)$.

1.3 Numere complexe. Inducţie, combinatorică. Polinoame

1.257A Să se calculeze $i + i^3 + i^5 + \ldots + i^{99}$.

a) i; b) $-i$; c) 0; d) 1; e) -1; f) $1 + i$.

1.258A Relaţia $|\sqrt{x^2 + 1} + i\sqrt{y - 2}\,| = 1$ $(y \geq 2)$ are loc dacă şi numai dacă

a) $y = 1 + x^2$; b) $y = 2 - x^2$; c) $y = 2 + x^2$; d) $y = x$; e) $y = -x$; f) $x^2 + y^2 = 1$.

1.259A Fie $\varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ şi $S = (2\varepsilon + \varepsilon^2)(2\varepsilon^2 + \varepsilon)$. Atunci

a) $S = 3$; b) $S = 1$; c) $S = \varepsilon$; d) $S = \varepsilon^2$; e) $S = \varepsilon + \varepsilon^2$; f) $S = 2$.

1.260A Dacă $z = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}} - i\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$, atunci $|z|^4$ are valoarea

a) 81; b) $2\sqrt{2}$; c) 10; d) 1; e) 16; f) $3\sqrt{3}$.

1.261A Dacă z este soluţie a ecuaţiei $|z| + z = 8 + 4i$, atunci $|z|$ este

a) 8; b) 5; c) 3; d) 4; e) 1; f) 2.

1.262A Fie $z = (x + iy)^n + (x - iy)^n$, unde $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ şi $n \in \mathbb{N}$. Să se determine n astfel încât z să fie real.

a) $n = 4$; b) $n = 7$; c) $n \geq 10$; d) $n \in \{2k | k \in \mathbb{N}\}$; e) $n \in \{2k + 1 | k \in \mathbb{N}\}$; f) $n \in \mathbb{N}$.

1.263A Fie $S_n = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \ldots + n(2n + 1)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. Atunci

a) $S_n = \frac{1}{36}(5n^4 - 6n^3 + 109n^2)$; b) $S_n = 10n - 7$; c) $S_n = \frac{1}{2}(11n^2 - 13n + 8)$; d) $S_n = n(n + 1)^3$; e) $S_n = \frac{1}{6}(4n^3 + 9n^2 + 5n)$; f) $S_n = 2n(n + 1)^3$.

1.264A Fie propoziţia P_n: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < a_n$. Pentru care dintre variantele următoare propoziţia P_n este adevărată $(\forall)\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$?

a) $a_n = 2$; b) $a_n = 2,5$; c) $a_n = 2\sqrt{n}$; d) $a_n = \frac{2n - 1}{n}$; e) $a_n = n/2$; f) $a_n = n/3$.

1.265A Care este este cea mai mică valoare M, $M \in \mathbb{N}$, pentru care afirmaţia " $2^n > n^2, (\forall) n \geq M$ " este adevărată?

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5; f) 6.

1.266A Fie $S = \dfrac{C_1^0}{C_1^1} + \dfrac{C_2^1}{C_2^2} + \dfrac{C_3^2}{C_3^3} + \ldots + \dfrac{C_n^{n-1}}{C_n^n}$. Atunci

a) $S = C_{2n}^n$; b) $S = 2C_{2n}^n$; c) C_n^{n-1}; d) C_{n+1}^{n-1}; e) $2C_n^{n-1}$; f) $2C_{n+1}^{n-1}$.

1.267A Dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea $\sum\limits_{k=1}^{n} k(ak + b) = 2C_{n+2}^3$, atunci

a) $a = 1, b = 2$; b) $a = 2, b = 1$; c) $a = b = 1$; d) $a = b = 2$; e) $a = 1, b = -1$; f) $a = 2, b = -1$.

1.268A Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţiile $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + a = 0$, $x^3 + x^2 - x + b = 0$ să aibă o soluţie dublă comună.

a) $a = b = -1$; b) $a = b = 2$; c) $a = -1, b = 2$; d) $a = -2, b = 1$; e) $a = b = 1$; f) $a = 1, b = -1$.

1.269A Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $x^4 + 3x^3 + mx^2 + 3x + 1 = 0$ să aibă toate soluţiile reale.

a) $m \in (-\infty, 17/4]$; b) $m \in (-\infty, -8]$; c) $m \in (-\infty, -8)$; d) $m \in (-8, 17/4)$; e) $m \in (0, 17/4)$; f) $m \in (-\infty, 17/4)$.

1.270A Fie $P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 2$. Să se calculeze $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3)$, unde x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 + 3x + 1 = 0$.

a) 2; b) 10; c) 12; d) 8; e) -10; f) -2.

1.271A Fie f un polinom cu coeficienţi reali. Restul împărţirii lui f la $x^3 - 2$ este egal cu pătratul câtului. Să se afle câtul, ştiind că $f(-2) + f(2) + 34 = 0$.

a) $2x + 1$; b) $2x - 1$; c) $3x - 1$; d) $-3x + 1$; e) $3x + 1$; f) $-2x + 1$.

1.272A Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca ecuaţia $x^4 + mx^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$ să aibă două soluţii duble, $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$.

a) $m = 2$; b) $m = 1$; c) $m = -1$; d) $m = -2$; e) $m = 0$; f) $m = 3$.

1.273A Aflaţi cel mai mare divizor comun al polinoamelor

$$f = (X^2 + 2X + 3)^2 - 5(X^2 + 2X + 3) + 6,\ g = X^3 + 4X^2 + 3X.$$

a) $X^2 + X$; b) $X^2 + 2X$; c) $X + 2$; d) $X + 1$; e) $X - 1$; f) $X^2 - 1$.

1.274A Să se determine perechile de numere reale (a, m) astfel ca polinomul $f = 6X^4 - 7X^3 + aX^2 + 3X + 2$ să se dividă prin polinomul $g = X^2 - X + m$.

a) $(-2, 0$; b) $(-1, 1)$; c) $(1, 1)$; d) $(-7, 1)$; e) $(-12, -2)$; f) $(-7, -1), (-12, -2)$.

1.275A Aflaţi valoarea lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care

$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n} = \frac{15}{8}.$$

a) $n = 20$; b) $n = 10$; c) $n = 12$; d) $n = 5$; e) $n = 25$; f) $n = 15$.

1.276A Numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{100}$ este

a) 10; b) 14; c) 17; d) 24; e) 31; f) 43.

1.277A Să se calculeze sumele $S_1 = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$, $S_2 = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$.

a) $S_1 = S_2 = 2^n$; b) $S_1 = 2^{n-1}, S_2 = 2^{n-2}$; c) $S_1 = S_2 = 2^{n-1}$;
d) $S_1 = S_2 = n$; e) $S_1 = S_2 = n - 1$; f) $S_1 = S_2 = n + 1$.

1.278A Să se calculeze suma $S = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$.

a) $S = (n+1)! - 1$; b) $S = n^n$; c) $S = (n+1)^n$;
d) $S = n^{n+1}$; e) $S = \frac{(n+1)!}{n}$; f) $S = (n+1)n!$.

1.279A Să se calculeze partea imaginară a numărului complex $z = \dfrac{1 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}$.

a) $\operatorname{Im} z = 1$; b) $\operatorname{Im} z = 0$; c) $\operatorname{Im} z = \mathrm{i}$; d) $\operatorname{Im} z = -\mathrm{i}$; e) $\operatorname{Im} z = -1$;
f) $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$.

1.280A Să se calculeze $E = (1 + \mathrm{i})^4$.

a) $1 + \mathrm{i}$; b) 1; c) 4; d) -4; e) $1 - \mathrm{i}$; f) i.

1.281A Dacă $\mathrm{i}z \in \mathbb{R}$ şi $|z| = 2$, atunci

a) $z = 2\mathrm{i}$; b) $z = -2\mathrm{i}$; c) $z = \mathrm{i}$; d) $z \in \{\pm \mathrm{i}\}$; e) $z \in \{\pm 2\mathrm{i}\}$; f) $z \in \{\mathrm{i}, 2\mathrm{i}\}$.

1.282A Fie $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$. Dacă $z' = \dfrac{z - 1}{1 - \bar{z}}$, atunci

a) $|z'| = 1$; b) $|z'| = 0$; c) $|z'| = \frac{1}{2}$; d) $|z'| = -1$; e) $|z'| = \mathrm{i}$; f) $|z'| = 3$

1.283A Următoarele numere complexe $z_1 = 2 + 2\mathrm{i}$, $z_2 = -1 + \mathrm{i}$, $z_3 = -2 - 2\mathrm{i}$, $z_4 = 1 - \mathrm{i}$ reprezentate în plan sunt vârfurile unui

a) pătrat; b) dreptunghi; c) romb; d) trapez isoscel; e) patrulater oarecare; f) paralelogram (care nu este romb).

1.284A Determinaţi perechile de numere reale (x, y) pentru care are loc egalitatea $(1 + 2\mathrm{i})x + (3 - 5\mathrm{i})y = 1 - 3\mathrm{i}$.

a) $(\frac{4}{11}, -\frac{5}{11})$; b) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$; c) $(4, -3)$; d) $(\frac{5}{2}, 1)$; e) $(-\frac{4}{11}, \frac{5}{11})$; f) $(\frac{4}{3}, \frac{7}{2})$.

1.285A Să se calculeze $\left|\dfrac{\alpha + \mathrm{i}}{\alpha - \mathrm{i}}\right|$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) $\frac{|\alpha|+1}{|\alpha|-1}$; b) $2|\alpha|$; c) $\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$; d) $|\alpha|$; e) $\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$; f) 1.

1.286A Să se determine termenul ce nu conţine pe x din dezvoltarea

$$\left(ax^{-\frac{1}{2}} + xa^{-\frac{1}{2}}\right)^{30},\ a, x \in \mathbb{R}.$$

a) T_8; b) T_{20}; c) T_9; d) T_{12}; e) T_{11}; f) T_{10}.

1.287A Să se rezolve inecuaţia $C_{2x}^2 < 15$.

a) $x \in [1, 3)$; b) $x \in (-\frac{5}{2}, 3)$; c) $x \in \{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\}$; d) $x \in \{1, 2\}$;
e) $x \in (1, \infty)$; f) nu are soluţii.

1.288A Să se afle valoarea expresiei $E = \dfrac{A_n^2}{A_n^1 - A_n^3}$, unde A_n^m este numărul aranjamentelor de n obiecte luate câte m.

a) $\frac{n-1}{n^2-2n+2}$; b) $\frac{n-1}{n^2+2n-2}$; c) $\frac{n-1}{n^2-3n+1}$; d) $\frac{n-1}{-n^2+2n+2}$; e) $\frac{n-1}{-n^2+3n-1}$; f) $\frac{n-1}{-n^2+3n+1}$.

1.289A Numărul $x = C_6^4 + A_5^2 - P_4$ are valoarea

a) 10; b) 11; c) 15; d) 20; e) 25; f) 28.

1.290A Determinaţi care termen al dezvoltării $\left(x\sqrt{y} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2000}$ conţine pe x şi y la puteri egale ?

a) Nu există un astfel de termen; b) T_{1000}; c) T_{999}; d) T_{1001}; e) T_{1002}; f) T_{998}.

1.291A Fie $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât x divide $n(n+1), (\forall) n \in \mathbb{N}$. Atunci

a) $x = 3$; b) x este număr impar; c) $x = 2$; d) $x = 4$; e) nu există asemenea numere x; f) $x = 103$.

1.292A Dacă n este numărul soluţiilor ecuaţiei $2C_x^2 + 6C_x^3 = 9x$, atunci

a) $n = 0$; b) $n = 2$; c) $n = 1$; d) $n = 4$; e) $n = 3$; f) $n = 5$.

1.293A Suma coeficienţilor polinomului $P(x) = (8x^3 - 7)^{10}$ este
a) 0; b) -1; c) 2^{10}; d) 1; e) 10; f) 2.

1.294A Să se determine n întreg astfel încât numărul $C_{5n+4}^{n^2+3n-4}$ să fie definit.
a) $n \in \{1,2\}$; b) $n \in \{3,4\}$; c) $n \geq 3$; d) $n \in \varnothing$;
e) $n \in \{2,3,4\}$; f) $n \in \{1,2,3,4\}$.

1.295A Mulţimea numerelor naturale n pentru care dezvoltarea $\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ conţine termeni independenţi de x este
a) $\{2k/k \in \mathbb{N}^*\}$; b) $\{4k/k \in \mathbb{N}^*\}$; c) $\{5k/k \in \mathbb{N}^*\}$; d) $\{10k/k \in \mathbb{N}^*\}$;
e) $\{3k/k \in \mathbb{N}^*\}$; f) $\varnothing$.

1.296A Dacă $S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$, atunci
a) $S_n = n^2$; b) $S_n = 2n$; c) $S_n = 2n - 1$; d) $S_n = 2n^2$; e) $S_n = e^n$; f) $S_n = 4n$.

1.297A Găsiţi $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ cifre}}{}^2 = 12345678987654321$.
a) $n = 9$; b) $n = 8$; c) $n = 7$; d) $n = 6$; e) $n = 5$; f) $n = 4$.

1.298A Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze suma $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.
a) $\frac{n+1}{n}$; b) $\frac{1}{n}$; c) $\frac{n}{n+1}$; d) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; e) $\frac{1}{n+1}$; f) $1 - \frac{1}{n}$.

1.299A Să se determine suma pătratelor modulelor rădăcinilor polinomului $f = X^3 + (3\mathrm{i} - 2)X^2 - (1 + 4\mathrm{i})X + 2 + \mathrm{i}$, ştiind că are o rădăcină reală.
a) 7; b) 3; c) $4 + 2\sqrt{10}$; d) $1 + 2\sqrt{10}$; e) $4 + 2\sqrt{2}$; f) $2 + \sqrt{5}$.

1.300A Să se calculeze valoarea expresiei $E = \frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_3}$, unde x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$.
a) 0; b) -3; c) 1; d) -1; e) 3; f) -6.

1.301A Toate polinoamele neidentic nule cu coeficienţi reali care verifică relaţia $P(x^3) = x^4 \cdot P(x), (\forall) x \in \mathbb{R}$ sunt de gradul
a) unu; b) doi; c) n oarecare; d) nu există asemenea polinoame; e) polinomul este o constantă; f) nici unul din răspunsurile anterioare nu este corect.

1.302A Calculaţi suma S a soluţiilor reale ale ecuaţiei: $z^6 - (1 - \mathrm{i})z^3 - \mathrm{i} = 0$.
a) Ecuaţia nu are soluţii reale; b) $S = 1$; c) $S = 0$; d) $S = -1$; e) $S = 1 + \sqrt{2}$; f) $S = 1 - \sqrt{2}$.

1.303A Fie numărul $E = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$. Determinaţi E şi parametrii reali a şi b astfel încât E să fie o soluţie a ecuaţiei $x^3 + ax + b = 0$.
a) $E = 2, a = 5, b = -20$; b) $E = 2, a = 6, b = -20$;
c) $E = 2, a \in \mathbb{R}, b = -8 - 2a$; d) $E = 3, a = 6, b = -20$;
e) $E \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, a = 6, b = -10$; f) $E = 2, a = -6, b = -20$.

1.304A Polinomul $X^4 + 3X^3 + 2X^2 + mX + n$ cu coeficienţi reali admite rădăcina complexă $x_1 = 1 + \mathrm{i}$. În acest caz valorile parametrilor m şi n sunt:
a) $m = -10, n = 2$; b) $m = -10, n = 20$; c) $m = 8, n = 2$; d) $m = -8, n = 2$;
e) $m = 10, n = 20$; f) $m = 2, n = 2$.

1.305B Fie $M = \left\{x \in \mathbb{R} \mid (\sqrt{3}+1)^x + (\sqrt{3}-1)^x \leq 4(\sqrt{2})^x\right\}$. Avem:
a) $M = [-2, 2]$; b) $M = \left(-\infty, \ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)$; c) $M = (-\infty, 2]$; d) $M = [-2, \infty)$;
e) $M = [-2\ln(\sqrt{3}+1), 2\ln(\sqrt{3}+1)]$; f) $M = \mathbb{R}$.

1.306B Fie ecuaţia $x^3 + 3x^2 + cx + d = 0$ ale cărei soluţii le notăm cu x_1, x_2, x_3. Fie M mulţimea perechilor $(c, d) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ cu proprietatea că x_1, x_2, x_3 sunt în progresie aritmetică, iar $x_1 + 1$, $x_2 + 1$, $x_3 + 1$ sunt în progresie geometrică şi fie k numărul elementelor lui M. Decideţi:
a) $M = \varnothing$; b) $k = 1$; c) $k = 2$; d) $k = 3$; e) $k = 4$; f) M este infinită.

1.307B Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = aX^{n+2} + bX^n + 2$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ sunt astfel încât $(X-1)^2 \mid f$. Dacă $q \in \mathbb{R}[X]$ este câtul împărţirii lui f la $(X-1)^2$, aflaţi $\lambda = q(1)$.
a) $\lambda = n^2$; b) $\lambda = n^2 - n$; c) $\lambda = n^2 + n$; d) $\lambda = n^2 - 2n$; e) $\lambda = n^2 + 3n$;
f) $\lambda = n^2 + 2n$.

1.308B Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = 1$, $z_1 \neq z_2$ şi $w = \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z_2}}\right|$. Avem:
a) $w = 1$; b) $w = 2$; c) $w = \frac{1}{2}$; d) $w = \frac{1}{3}$; e) $w = 4$; f) w depinde de z_1 şi z_2.

1.309B Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{C}_{3x+7}^{6x+2}$, unde D este domeniul maxim de definiţie. Fie $M = \max\limits_{x\in D} f(x)$. Atunci
a) $M = 21$; b) $M = 84$; c) $M = 45$; d) $M = 72$; e) $M = 210$; f) $M = 60$.

1.310B Fie $S = \mathrm{C}_{16}^0 - \mathrm{C}_{16}^2 + \mathrm{C}_{16}^4 - \mathrm{C}_{16}^6 + \cdots - \mathrm{C}_{16}^{14} + \mathrm{C}_{16}^{16}$. Atunci
a) $S = 256$; b) $S = 64$; c) $S = 0$; d) $S = -32$; e) $S = 128$; f) $S = 1024$.

1.311B Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $a, b \in \mathbb{R}$. Fie $x = a + b$, $y = a\varepsilon + b\varepsilon^2$ şi $z = a\varepsilon^2 + b\varepsilon$. Aflaţi $\lambda \in \mathbb{C}$, ştiind că $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda ab$.
a) $\lambda = 1$; b) $\lambda = 3$; c) $\lambda = \varepsilon$; d) $\lambda = \bar{\varepsilon}$; e) $\lambda = 6$; f) $\lambda = 0$.

1.312B Fie $a_n = \frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi fie $M = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid a_n \leq \frac{28}{15} \right\}$. Notăm cu p numărul elementelor lui M. Avem:
a) $p = 4$; b) $p = 5$; c) $p = 6$; d) $p = 7$; e) $p = 8$; f) $p = 9$.

1.313B Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X+1)^{302} + X + a$ şi $g = X^2 + 3X + 3$. Valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care $g \mid f$ este
a) $a = 0$; b) $a = 1$; c) $a = 2$; d) $a = 3$; e) $a = 4$; f) $a = -1$.

1.314B Fie x_1, x_2, x_3, x_4 soluţiile ecuaţiei $x^4 - 2x^3 + 3x + 2 = 0$ şi fie $S = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$. Atunci
a) $S = -4$; b) $S = 2$; c) $S = -16$; d) $S = 20$; e) $S = 18$; f) $S = -12$.

1.315B Fie $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $P = X^{2n+1} - X^n + aX^{n-1} + X + 1$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $Q = X^2 + X + 1$. Notăm cu M mulţimea acelor $a \in \mathbb{R}$ pentru care există $n \geq 2$ astfel încât Q divide P. Dacă $\lambda = \sum_{a \in M} a$, atunci
a) $\lambda = 1$; b) $\lambda = -2$; c) $\lambda = 0$; d) $\lambda = 4$; e) $\lambda = 6$; f) $\lambda = -1$.

1.316B Fie ecuaţia $\begin{vmatrix} 2-a & a-x & x-1 \\ 1-x^2 & x^2 & -1 \\ 2-a-2x & x+a & x-2 \end{vmatrix} = 0$, $a \in \mathbb{R}$, şi A mulţimea valorilor $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia admite o soluţie dublă întreagă. Atunci
a) $A = \{-1\}$; b) $A = \{-2, 1\}$; c) $A = \{\frac{1}{2}, 3\}$; d) $A = \{0\}$; e) $A = \{0, 2, 4\}$; f) $A = \varnothing$.

1.317B Fie $A = C_{10}^1 + 2\,C_{10}^2 + 3\,C_{10}^3 + \cdots + 10\,C_{10}^{10}$. Atunci
a) A este număr prim; b) $4800 < A < 5000$; c) $3 \mid A$; d) $7 \mid A$; e) $A \in (5000, 5200)$; f) $A = 1000$.

1.318B Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = C_{8x}^{x^2+12}$, unde D este domeniul maxim de definiţie. Dacă $A = \max_{x \in D} f(x)$, atunci
a) $A \in (35000, 36000)$; b) $A \in (30000, 35000)$; c) $A \in (9000, 10000)$; d) A este număr prim; e) $25 \mid A$; f) $A = \varnothing$.

1.319B Să se determine mulţimea valorilor $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + 1 = 0$ are toate soluţiile reale.
a) $[3, \infty)$; b) $[0, 3]$; c) $[-1, 0]$; d) $(-\infty, -6]$; e) $\varnothing$; f) $\mathbb{R}$.

1.320B Dacă $|z - 1| = 2$ şi $|\mathrm{Im}\,(z)| \geq 2$, atunci
a) $z = 1 \pm 2\mathrm{i}$; b) $z \in \{\pm 2\mathrm{i}\}$; c) $z = 1 - 2\mathrm{i}$; d) $z = 1 + 2\mathrm{i}$; e) $z \in \{1 + 2\mathrm{i}, 1 + \mathrm{i}\}$; f) $z \in \{1 - 2\mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}\}$.

1.321B Fie numerele complexe $a = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ şi $b = \frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$. Partea reală a numărului complex $z = \frac{a-b}{1+ab}$ este
a) $1/\sqrt{2}$; b) $1/\sqrt{6}$; c) 1; d) $\sqrt{2}$; e) $\sqrt{3}$; f) 0.

1.322B Să se afle $z^{4k+1}, k \in \mathbb{N}$, dacă $z = 1 + \mathrm{i}$.
a) $2^{2k}\mathrm{i}$; b) $(-2)^k\mathrm{i}$; c) $(-4)^k z$; d) $4^k z$; e) $(-2)^k z$; f) $4^{k+1} z$.

1.323B Numărul complex $z = \mathrm{i}^1 \cdot \mathrm{i}^3 \cdot \mathrm{i}^5 \cdot \ldots \cdot \mathrm{i}^{99}$ este
a) $z = 1$; b) $z = -1$; c) $z = -\mathrm{i}$; d) $z = \mathrm{i}$; e) $z = 0$; f) $z = 1 + \mathrm{i}$.

1.324B Fie $z = \frac{8+6\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$. Să se calculeze $|z|$.
a) 4; b) 2; c) 1; d) $\frac{5}{7}$; e) 3; f) $\frac{11}{7}$.

1.325B Se consideră funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită de $f(z) = \frac{m+1}{2} z - \frac{m-1}{2} \bar{z}$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Să se determine funcţia $f^5 = f \circ f \circ f \circ f \circ f$, unde prin $\circ$ se notează operaţia de compunere a funcţiilor.
a) $(m^5 + 1)z + (m^5 - 1)\bar{z}$; b) $(m+1)z^5$; c) $\frac{m^5+1}{2} z - \frac{m^5-1}{2} \bar{z}$; d) $\frac{1}{2}[z^5 - (\bar{z})^5]$; e) $\frac{m+1}{2} z^5 - \frac{m-1}{2} (\bar{z})^5$; f) $(m+1)z^5 - (m-1)(\bar{z})^5$.

1.326B Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}$, numărul $(\sqrt{3} - \mathrm{i})^n$ este real ?
a) $n = 0$; b) nu există; c) $n = 6$; d) $n = 6k, k \in \mathbb{N}$; e) $n = 4k, k \in \mathbb{N}$; f) $n = 4$.

1.327B Să se rezolve ecuaţia $C_{3x+4}^{x^2+2x-4} = C_{10}^6$.
a) $x \in \{0, 1\}$; b) $x \in \{1, 4\}$; c) $x \in \{2, 3\}$; d) $x = 2$; e) $x = 3$; f) $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.

1.328B Să se determine coeficientul lui x^3 din dezvoltarea $(2 + x + 2x^2)^4$.
a) 104; b) 8; c) 96; d) 110; e) 100; f) 90.

1.329B Suma S a soluţiilor reale ale ecuaţiei $x + x^4 + x^7 + \ldots + x^{34} = 0$ este
a) $S = 0$; b) $S = -1$; c) $S = -2$; d) $S = 1$; e) $S = 2$; f) ecuaţia nu are soluţii reale.

1.330B Să se determine valorile parametrului $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $x^4 - \alpha x^3 + \alpha^2 x^2 + \alpha x + 1 = 0$ nu are toate soluţiile reale.
a) $\alpha > 0$; b) $\alpha > 1$; c) $\alpha \in \mathbb{R}$; d) $0 < \alpha < 1$; e) $-1 < \alpha < 1$; f) $0 < \alpha < 3/8$.

1.331B Dacă $A_x^7 + 3A_x^5 = 45A_x^5$, atunci
a) $x = 8$; b) $x = 7$; c) $x = 12$; d) $x \in \{-1, 12\}$; e) $x = 13$; f) $x = 0$.

1.332B Câţi termeni raţionali sunt în dezvoltarea $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{20}$?
a) 2; b) 3; c) 8; d) 4; e) 10; f) 6.

1.333B Să se determine numărul natural n astfel încât în dezvoltarea $(5+n)^n$ al zecelea termen să fie cel mai mare.

a) $n=9$; b) $n=10$; c) $n=11$; d) $n=12$; e) $n=13$; f) $n=15$.

1.334B Coeficientul lui x^6 din expresia $\left[\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)\right]^{15}$ este

a) $C_{15}^{12}\cdot C_{15}^{10}$; b) $C_{15}^{15}\cdot C_{15}^{4}$; c) $C_{15}^{15}\cdot C_{15}^{4}+C_{15}^{12}\cdot C_{15}^{8}$; d) $C_{15}^{10}\cdot C_{15}^{8}$;
e) $C_{15}^{15}\cdot C_{15}^{4}+C_{15}^{12}\cdot C_{15}^{8}+C_{15}^{9}\cdot C_{15}^{12}$; f) $C_{15}^{9}\cdot C_{15}^{10}$.

1.335B Fie $s_n=\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Atunci

a) $s_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; b) $s_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$; c) $s_n=\frac{(n+1)}{n(n+1)}$;
d) $s_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$; e) $s_n=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$; f) formulele precedente sunt toate false.

1.336B Fie $A=C_n^1+2C_n^2+...+nC_n^n, n\in\mathbb{N}^*$. Atunci A este

a) $n\cdot2^n$; b) $n\cdot2^{n-1}$; c) n^n; d) 2^n; e) $n\cdot2^{n+1}$; f) 2^{n+1}.

1.337B Suma $S_n=\sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2$ are valoarea

a) $n(2n+1)$; b) $4n-2$; c) $2n^2+2$; d) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; e) n^3; f) $(n+1)2^{n-1}$.

1.338B Care este termenul dezvoltării $\left(x+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{72}$ care nu-l conţine pe x ?

a) T_{36}; b) T_{55}; c) T_{43}; d) T_{21}; e) T_{47}; f) T_{39}.

1.339B Aflaţi parametrii reali x şi y astfel încât ecuaţia $t^4-2xt^2+y^2=0$, cu necunoscuta t, să admită soluţii reale în progresie aritmetică.

a) $x>0,\ 3x=5|y|$; b) $2x=y$; c) $x=y$; d) $x+y=0$; e) $x>0,\ 3x=y$;
f) $x<0,\ x=5y$.

1.340B Fie $\varphi\in\mathbb{R}$; câte soluţii reale distincte are ecuaţia $x^3-3x-\sin\varphi=0$?

a) trei; b) una; c) două; d) cel mult una; e) cel mult două; f) patru.

1.341B Ce fel de număr este soluţia reală a ecuaţiei $x^3+5x-1=0$?

a) natural, par; b) natural, impar; c) întreg par; d) întreg impar; e) raţional;
f) iraţional.

1.342B Să se determine parametrii reali α,β şi γ astfel încât polinomul $3X^4-16X^3+\alpha X^2+\beta X+\gamma$ să aibă rădăcina $2+i$ şi să fie divizibil cu $X-1$.

a) 0,1,5; b) 1,0,1; c) $32,-24,5$; d) $2,-3,5$; e) $13,-7,5$; f) $10,-2,13$.

1.343B Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $x^4+2x^3+3x^2+ax+b=0$ să admită soluţia $1+i$.

a) $a=10,b=20$; b) $a=-1,b=2$; c) $a=12,b=3$; d) $a=-10,b=18$;
e) $a=2,b=14$; f) $a=b=2$.

1.344B Ştiind că polinomul $aX^4+bX^3+cX^2+(a-1)X-1$ se divide cu $(X-1)^3$, să se calculeze suma $S=a+b+c$.

a) $S=4$; b) $S=0$; c) $S=1$; d) $S=-1$; e) $S=2$; f) $S=-2$.

1.345B Fie n numărul valorilor complexe distincte pe care le ia funcţia polinomială $P(x)=x^6+2x^5+5x^4+4x^3+6x^2+5x+7$ dacă x este soluţie a ecuaţiei $x^3+x+1=0$. Atunci

a) $n=0$; b) $n=1$; c) $n=2$; d) $n=3$; e) $n=4$; f) $n=5$.

1.346B Ecuaţia $2x^5+3x^4+5x^3+3x^2+6x+4=0$ are soluţiile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Determinaţi numărul $\dfrac{1}{1+x_1}\cdot\dfrac{1}{1+x_2}\cdot\dfrac{1}{1+x_3}\cdot\dfrac{1}{1+x_4}\cdot\dfrac{1}{1+x_5}$.

a) $-\frac{2}{3}$; b) 1; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{3}{2}$; e) $-\frac{3}{2}$; f) -1.

1.347A Să se determine toate valorile reale ale lui m astfel încât numărul complex $(1-m)i^3-2(1+m)i^2+3mi+1$ să fie real.

a) $m=\frac{1}{2}$; b) $m=4$; c) $m=2$; d) $m=-\frac{1}{3}$; e) $m=3$; f) $m=\frac{1}{4}$.

1.348C Fie $z,z'\in\mathbb{C}$ astfel încât $|z|=|z'|=1$, $zz'+1\neq0$ şi $w=\dfrac{z+z'}{1+zz'}$. Avem

a) $w\in\mathbb{R}$; b) $w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$; c) $\mathrm{Re}w=0$; d) $\mathrm{Re}w=\mathrm{Im}w$; e) $|w|=1$; f) $\mathrm{Im}w=1$.

1.349C Să se determine $z\in\mathbb{C}$ dacă $\bar{z}+|z|\neq0$ şi $w=\dfrac{z+|z|}{\bar{z}+|z|}$ este real.

a) $z=1$; b) $z=x>0$; c) $z=x\in\mathbb{R}$; d) $z\neq0$; e) nu există; f) $z=ix, x\in\mathbb{R}^*$.

1.350C Să se calculeze suma $1+2i+3i^2+\ldots+ni^{n-1},\quad n\in\mathbb{N}^*$.

a) $(n+1)i^n$; b) $\dfrac{1}{2}[i-(n+1)i^{n+1}-ni^n]$; c) $(-1)^n(n+1)$; d) $\dfrac{1}{2}(i-ni^n)$;
e) $(n+1)i^{n+1}$; f) alt răspuns.

1.351C Să se calculeze suma $S = 1-(1-\mathrm{i})+(1-\mathrm{i})^2-(1-\mathrm{i})^3+(1-\mathrm{i})^4-(1-\mathrm{i})^5$.
a) $1-2\mathrm{i}$; b) $1+2\mathrm{i}$; c) $2+\mathrm{i}$; d) $2-3\mathrm{i}$; e) $2+3\mathrm{i}$; f) $2-$[illegible].

1.352C Se consideră suma $S = \dfrac{C_n^0}{1} + \dfrac{C_n^1}{2} + \dfrac{C_n^2}{3} + \cdots + \dfrac{C_n^n}{n+1}$. Avem
a) $S = 2^{n+1}$; b) $S = \frac{2^n-1}{n}$; c) $S = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$; d) $S = \frac{2^n-1}{n+1}$; e) $S = \frac{2^{n+1}-1}{n}$; f) $n \cdot 2^{n+1}$.

1.353C Câte numere de cinci cifre în care să nu se repete nici una dintre cifre, se pot forma cu cifrele $0, 2, 3, 5, 6$?
a) 16; b) 24; c) 64; d) 96; e) 12; f) 120.

1.354C Termenul dezvoltării $\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^5$ care nu-l conţine pe x este egal cu
a) 1; b) 5; c) 51; d) 55; e) 115; f) 205.

1.355C Fie $n \in \mathbb{N}$ şi fie $S = C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots$. Atunci
a) $S = \frac{1}{2}(2^n + 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4})$; b) $S = \frac{1}{2}(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4})$;
c) $S = \frac{1}{2}(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4})$; d) $S = \frac{1}{2}(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4})$;
e) $S = \frac{1}{2}(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4})$; f) $S = \frac{1}{2}(2^n + 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4})$.

1.356C O urnă are 10 bile albe şi 40 de bile negre, toate numerotate diferit. În câte moduri diferite se pot extrage trei bile, astfel încât cel mult una din bile să fie albă ?
a) 1390; b) 17680; c) 1494; d) 442; e) 195; f) 221.

1.357C Cel mai mare divizor al tuturor numerelor $7^{4n+1} - 7$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, este
a) 5; b) 70; c) 35; d) $7^5 - 7$; e) 420; f) 30.

1.358C Fie S suma coeficienţilor polinomului $\left(\sqrt{2}X - \sqrt{3}\right)^{10}$. Atunci
a) $S = \sqrt{2}^{10}$; b) $S = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{10}$; c) $S = \sqrt{2}^{10} \cdot \sqrt{3}^{10}$; d) $S = 1$; e) $S = 0$;
f) $S = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{10}$.

1.359C Suma $S_n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$ este dată de
a) $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3!}$; b) $S_n = C_{2n}^n$; c) $S_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$; d) $S_n = n^2$;
e) $S_n = n^2 + 1$; f) $S_n = n^2 - 1$.

1.360C Numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $\left(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5}\right)^{200}$ este
a) 50; b) 52; c) 51; d) 100; e) 4; f) o infinitate.

1.361C Determinaţi mulţimea valorilor parametrului $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ pentru care ecuaţia $(a-2)x^4 - 2(a+1)x^3 - ax^2 + 2(a+1)x + (a-2) = 0$ are toate soluţiile reale.

a) $\left[\frac{7}{8}, +\infty\right) \setminus \{2\}$; b) $\left(\frac{7}{4}, +\infty\right) \setminus \{2\}$; c) $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right) \setminus \{2\}$; d) $\varnothing$; e) $\left(-\frac{3}{8}, 5\right) \setminus \{2\}$; f) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

1.362C Să se determine o condiţie necesară şi suficientă ca rădăcinile polinomului $X^3 + aX^2 + bX + 2$, $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ să fie în progresie geometrică.
a) $a = 1, b = 2$; b) $b = a\sqrt[3]{2}$; c) nu există; d) $b = a\sqrt{2}$; e) $b = 2a$; f) $a = 2, b = 1$.

1.363C Care din următoarele propoziţii este adevărată ?
a) polinomul $X^3 - 2$ este reductibil peste $\mathbb{Q}$; b) un polinom $f \in \mathbb{R}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă f nu are rădăcini reale; c) polinomul $X^4 + X^2 + 1$ este reductibil peste $\mathbb{R}$; d) polinomul $X^4 + 1$ este ireductibil peste $\mathbb{R}$; e) dacă un polinom $g \in \mathbb{R}[X]$ este reductibil peste $\mathbb{R}$ atunci el are cel puţin o rădăcină reală; f) suma a două polinoame ireductibile peste $\mathbb{R}$ este polinom ireductibil peste $\mathbb{R}$.

1.364C Câte polinoame $p(X)$ de grad 3 cu coeficienţi întregi satisfac condiţiile $p(7) = 5$ si $p(15) = 9$?
a) o infinitate; b) trei; c) unul; d) nici unul; e) patru; f) zece.

1.365C Rezolvaţi ecuaţia $6x^4 + x^3 + 52x^2 + 9x - 18 = 0$ ştiind că admite soluţia $3\mathrm{i}$.
a) $\left\{3\mathrm{i}, -3\mathrm{i}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$; b) $\left\{3\mathrm{i}, -3\mathrm{i}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\}$; c) $\{3\mathrm{i}, -3\mathrm{i}\}$; d) $\left\{3\mathrm{i}, -3\mathrm{i}, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\}$;
e) $\left\{3\mathrm{i}, -3\mathrm{i}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$; f) $\left\{3\mathrm{i}, -3\mathrm{i}, 1, -\frac{2}{3}\right\}$.

1.366C Soluţiile ecuaţiei $z^3 - (4+\mathrm{i})z^2 + mz - 7\mathrm{i} + 4 = 0$, $m \in \mathbb{C}$ sunt $z_1 = \mathrm{i}$, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$; fie $a = m + z_2 + z_3^2$. Atunci
a) $a = 8 + 10\mathrm{i}$; b) $a \in \{8 + 10\mathrm{i}, 7 + 10\mathrm{i}\}$; c) $a \in \{11 + 6\mathrm{i}, 13 - 2\mathrm{i}\}$; d) $a = 13 - 2\mathrm{i}$;
e) $a \in \{13 - 2\mathrm{i}, 7 + 10\mathrm{i}\}$; f) $a = 7 + 10\mathrm{i}$.

1.367C Ecuaţia $x^{100} + x^{99} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0$ are 100 de soluţii complexe notate $x_k (1 \leq k \leq 100)$. Să se calculeze suma: $S = \sum\limits_{k=1}^{100} x_k^{103}$
a) $S = 1$; b) $S = 0$; c) $S = -1$; d) $S = i$; e) $S = -i$; f) $S = 1 + i$.

1.4 Matrice. Determinanţi. Sisteme liniare

1.368A Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$, $m, x \in \mathbb{R}$. Aflaţi mulţimea M a tuturor valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care A este inversabilă oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

a) $M=\varnothing$; b) $M=(0,\infty)$; c) $M=(2,\infty)$; d) $M=(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$;
e) $M=(-1,1)$; f) $M=(-\infty,\frac{1}{2})\cup(2,\infty)$.

1.369A Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x+y+mz=1 \\ x-y+m^2z=m \\ 2x+(m+1)z=m^2 \end{cases}$ şi fie M mulţimea acelor $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil, iar $S=\sum\limits_{m\in M} m$. Atunci

a) $M=\varnothing$; b) $S=\frac{1}{2}$; c) $S=-1$; d) $S=\frac{3}{2}$; e) $S=0$; f) $S=-\frac{1}{3}$.

1.370A Fie $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Fie ecuaţia matricială $A\cdot X\cdot B=C$. Dacă S este suma elementelor matricei X, atunci

a) $S=-21$; b) $S=-20$; c) $S=21$; d) $S=0$; e) $S=-15$; f) $S=15$.

1.371A Fie $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ şi $A=\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculaţi $A+A^2+A^3+\ldots+A^{n-1}$.

a) 2^nA; b) $(2^n-1)A$; c) $(n-1)A$; d) $(2^{n-1}-1)A$; e) n^2A; f) $n(n+1)A$.

1.372A Matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ satisface $A^3=mA^2+nA$ pentru

a) $n=2, m=2$; b) $n=1, m=3$; c) $n=-2, m=1$; d) $n=-4, m=5$;
e) $n=-1, m=-2$; f) $n=2, m=-1$.

1.373A Matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$ are rangul doi pentru

a) $a=1, b=1$; b) $a=1, b=5$; c) $a=2, b=2$;
d) $a=1, b=2$; e) $a=0, b=1$; f) $a=0, b=-1$.

1.374A Matricea $\begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ x & -1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice $x\in\mathbb{R}$ dacă

a) $3-2\sqrt{3}<m<3+2\sqrt{3}$; b) $m>3+2\sqrt{3}$; c) $m<3-2\sqrt{3}$; d) $3-2\sqrt{3}<m$;
e) $m<3+2\sqrt{3}$; f) $3-2\sqrt{3}\le m\le 3+2\sqrt{3}$.

1.375A Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determinaţi a şi b astfel încât $AB=BA$.

a) $a=2, b=0$; b) $a=-1, b=3$; c) $a=2, b\in\mathbb{R}$; d) $a=-2, b=0$;
e) $a=8, b=2$; f) $a=1, b=1$.

1.376A Să se rezolve ecuaţia matriceală $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}X=X\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} m & m \\ m & m \end{pmatrix}, m\in\mathbb{R}$; d) $\begin{pmatrix} 3m & m \\ m & 3m \end{pmatrix}, m\in\mathbb{R}$;
e) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} -m & -m \\ m & m \end{pmatrix}, m\in\mathbb{R}$.

1.377A Să se găsească toate matricele de forma $A=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ pentru care $A^2-3A=-2I$, unde I este matricea unitate, iar $x,y\in\mathbb{R}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.378A Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ m^2 & -m & x \end{vmatrix}=0$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) $x\in\{1\}$; b) $x\in\{1,2,3\}$; c) $x\in\{1,-m,m-1\}$; d) $x\in\{2,-m,m-1\}$;
e) $x\in\{1,2,3\}$; f) $x\in\{-2,2,3\}$.

1.379A Fie x_1,x_2,x_3 soluţiile ecuaţiei $x^3-3x^2+x+1=0$. Calculaţi

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3} \\ \frac{x_3}{\frac{1}{x_2}} & \frac{x_1}{\frac{1}{x_3}} & \frac{x_2}{\frac{1}{x_1}} \end{vmatrix}.$$

a) 4; b) -6; c) -4; d) 3; e) 6; f) -3.

1.380A Calculaţi $\det f(A)$, unde $f(x)=2x^3+3x$ şi $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) 140; b) 110; c) 11; d) 120; e) 100; f) 40.

1.381A Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 11 \\ 5 & 1 & 7 \\ 10 & 8 & 15 \end{pmatrix}$ şi $X=\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$.
Să se determine $x,y,z\in\mathbb{R}$ astfel încât X să verifice relaţia $AXA=B$

a) $x=-1, y=-3, z=-2$; b) $x=1, y=2, z=3$; c) $x=1, y=3, z=2$;
d) $x=1, y=4, z=6$; e) $x=1, y=-3, z=5$; f) $x=1, y=3, z=5$.

1.382A Determinaţi valorile parametrilor reali a,b,c astfel încât sistemul

$$\begin{cases} 2x-3y+4z-5t=1 \\ x+9y+az+t=-3 \\ 5x-6y+10z-bt=c \end{cases}$$

să fie compatibil.

a) $a \neq 2, b, c \in \mathbb{R}$; b) $a=2, b=1, c=3$; c) $a \neq 2, b, c \in \mathbb{R}$ sau $b \neq 12, a, c \in \mathbb{R}$; d) $a \neq 2, b, c \in \mathbb{R}$ sau $b \neq 12, a, c \in \mathbb{R}$ sau $a=2, b=12, c=2$; e) $a=2, b=1, c=-3$; f) $a=2, b=-1, c=3$.

1.383A Aflaţi numărul de soluţii reale ale sistemului $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+2y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2+2z^2=6. \end{cases}$

a) 1; b) 0; c) 2; d) 4; e) 8; f) 16.

1.384A Aflaţi numărul de soluţii reale ale sistemului $\begin{cases} 2xy+yz+zx=1 \\ xy+2yz+zx=2 \\ xy+yz+2zx=3. \end{cases}$

a) 1; b) 0; c) 2; d) 4; e) 8; f) 16.

1.385A Fie sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=a \\ cx+ay+bz=b \\ bx+cy+az=c \end{cases}$, unde a, b, c sunt numere reale, distincte două câte două. Sistemul are soluţie unică dacă şi numai dacă

a) $a+b+c \neq 0$; b) $a^2+b^2+c^2=1$; c) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=1$; d) $a=b+1=c+2$; e) $a=b-1=c-2$; f) $a^2+b^2+c^2 \neq 1$.

1.386A Calculaţi determinantul $\begin{vmatrix} 14587 & 14597 \\ 29243 & 29253 \end{vmatrix}$.

a) 6560; b) -136560; c) -145560; d) -146560; e) -146660; f) -147560.

1.387A Determinaţi $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{vmatrix} x+y & xy & 0 \\ 1 & x+y & xy \\ 0 & 1 & x+y \end{vmatrix} = 0.$

a) $x=-y=m, m \in \mathbb{R}$; b) $x=y=1$; c) $x=y=m, m \in \mathbb{R}$; d) $x=1, y=2$; e) $x=3, y=-4$; f) $x=3, y=4$.

1.388A Calculaţi $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 \end{vmatrix}$, unde x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3-6x+5=0$.

a) -30; b) 18; c) 0; d) -11; e) 30; f) $1+3\sqrt{21}$.

1.389A Rezolvaţi ecuaţia $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0.$

a) $x \in \{1, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}\}$; b) $x \in \{1, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\}$; c) $x \in \{1, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}\}$; d) $x=1$; e) $x \in \{1, 2\}$; f) $x \in \{1, 10, 100\}$.

1.390A Fie A o matrice pătrată cu proprietatea $A^3=0$. Atunci $(I-A)^{-1}$ este

a) I; b) $I+A$; c) $I+A+A^2$; d) $-I$; e) $I-A$; f) $I-A+A^2$.

1.391A Inversa matricei $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ este

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & -5 & 3 \\ -1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

1.392A Oricare ar fi matricele pătrate A, B, calculând $(A+B)^3$ obţinem

a) $A + B^3$; b) $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$; c) $A+B$; d) $A^3+2A^2B+ABA+BAB+2BA^2+B^3$; e) $A^3+A^2B+ABA+AB^2+BA^2+BAB+B^2A+B^3$; f) $A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$.

1.393A Fie $f, g, h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile şi $\Delta(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ h(x) & k(x) \end{vmatrix}$. Calculaţi $\Delta'(x)$.

a) $\begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) \\ h'(x) & k'(x) \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) \\ h(x) & k(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ h'(x) & k'(x) \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} f(x) & g'(x) \\ h(x) & k'(x) \end{vmatrix}$;
d) $\begin{vmatrix} f'(x) & g(x) \\ h(x) & k'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g'(x) \\ h'(x) & k(x) \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} f'(x) & g(x) \\ h(x) & k(x) \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ h(x) & k'(x) \end{vmatrix}$.

1.394A Pentru fiecare număr real x, considerăm matricea $A_x = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix}$. Care dintre relaţiile următoare este falsă ?

a) $A_x + A_y = A_{x+y}$; b) $A_x A_y = A_y A_x$; c) $A_x A_y = A_{2xy}$; d) $A_x A_{\frac{1}{2}} = A_{\frac{1}{2}} A_x = A_x$; e) $det(A_x)=0$; f) $A_x^2 = x.A_x, x \neq 0$.

1.395A Fie $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu elementele $a_{ij} = \max\{i, j\}$ pentru $i, j = \overline{1, n}$ şi $\Delta = \det M$. Atunci

a) $\Delta = n!$; b) $\Delta = 0$; c) $\Delta = \frac{n(n+1)}{2}$; d) $\Delta = (-1)^{n+1}$; e) $\Delta = (-1)^{n+1} n$; f) $\Delta = (-1)^{n+1} n!$.

1.396A Fiind date matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$, se cere să se determine x şi y astfel încât $AB = BA$.

a) $x=-1,\ y=1$; b) $x=0,\ y=0$; c) $x=1,\ y=-1$;
d) $x=0,\ y=1$; e) $x=1, y=1$; f) $x=1,\ y=0$.

1.397A Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ este

a) x^2-y^2; b) x^2+y^2; c) $-x^3-y^3$; d) $-2(x^3+y^3)$; e) $-2(x^2+y^2)$; f) $-3(x^3+y^3)$.

1.398A Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $\begin{vmatrix} x^3 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 \\ x & 1 & m \end{vmatrix} = 0$ care sunt independente de m.

a) 2; b) 0; c) 5; d) 1; e) 4; f) 3.

1.399A Se consideră sistemul $(S): \sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j = a^{i-1}$, $i=\overline{1,4}$, $a \in \mathbb{R}^*$, unde

$$a_{ij} = \begin{cases} a, \text{ dacă } i=j \\ 1, \text{ dacă } i \neq j \end{cases}, \quad i,j=\overline{1,4}.$$

Dacă $A = \{a \in \mathbb{R}^* \mid (S)$ este compatibil nedeterminat$\}$, atunci
a) $A=\{-3,1\}$; b) $A=\mathbb{R}\setminus\{-3,1\}$; c) $A=\{3\}$; d) $A=\{1\}$; e) $A=\varnothing$;
f) $A=\mathbb{R}$.

1.400A Să se rezolve inecuaţia $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} \geq 0.$

a) $x\in(\frac{1}{2},\infty)$; b) $x\in[\frac{1}{2},\infty)$; c) $x\in\{-1\}\cup[\frac{1}{2},\infty)$; d) $x\in[-1,\infty)$;
e) $x\in\{-1\}\cup(\frac{1}{2},\infty)$; f) $x\in\mathbb{R}$.

1.401A Suma S a soluţiilor distincte ale ecuaţiei $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x^2 & x^3 \\ x^2 & x^4 & x^6 \end{vmatrix} = 0$ este

a) $S=-1$; b) $S=1$; c) $S=0$; d) $S=2$; e) $S=-2$; f) $S=\mathrm{i}$.

1.402A Fie $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$, $x,y\in\mathbb{R}$ şi $M=2xX-X^2$. Atunci

a) $M=O_2$; b) $M=yI_2$; c) $M=xI_2$; d) $M=x^2I_2$; e) $M=(x+y)I_2$;
f) $M=I_2$.

1.403A Fie $z\neq 1$; $z^3=1$ si $D=\begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z & z+1 \end{vmatrix}$. Atunci

a) $D=4$; b) $D=3$; c) $D=z$; d) $D=z^2$; e) $D=1$; f) $D=0$.

1.404A Fie determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} x & a & a & a & a \\ a & x & a & a & a \\ a & a & x & a & a \\ a & a & a & x & a \\ a & a & a & a & x \end{vmatrix}$. Atunci

a) $\Delta=0$; b) $\Delta=5x+4a$; c) $\Delta=(x+4a)(x-a)^4$; d) $\Delta=(-1)^4(x+1)^4$;
e) $\Delta=(x-4a)(x+a)^4$; f) toate egalităţile anterioare sunt false.

1.405A Dacă ω este o soluţie a ecuaţiei $x^2+x+1=0$, să se calculeze suma

$$\sum_{k=1}^{3p}\begin{pmatrix} \omega^k & \omega^{2k} & \omega^{3k} \\ \omega^{3k} & \omega^k & \omega^{2k} \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3p \\ 3p & 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \omega & 1 & 3p \\ 3p & \omega & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 3p & 0 \\ 0 & 1 & 3p \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & \omega & 3p \\ 3p & 1 & \omega \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.406A Pentru câte valori ale lui $m\in\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} x-my+z=2 \\ x+y-mz=2 \\ 2x-y+3z=4. \end{cases}$
este compatibil simplu nedeterminat ?
a) o singură valoare; b) două valori; c) trei valori; d) nici o valoare; e) patru valori; f) $m\in\mathbb{R}$.

1.407A Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} x+3y+2z=4 \\ x+y+z=a \\ x+2y+z=2 \\ x-y+2z=-1 \end{cases}$
să aibă soluţie unică.
a) 0; b) 1; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{3}{4}$; e) 2; f) $a\in\varnothing$.

1.408A Să se determine m real astfel încât sistemul $\begin{cases} mx+y+z=0 \\ x+my+2z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$
să aibă numai soluţia nulă (banală).
a) $m=2$; b) $m\in\{-1,2\}$; c) $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$; d) $m=-1$; e) $m\in\mathbb{R}$;
f) $m=0$.

1.409A Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} x+my+z=0 \\ mx+y+z=0 \\ x+y+mz=0 \end{cases}$
să aibă şi soluţii nenule (nebanale).

a) $m \in \{1\}$; b) $m \in \varnothing$; c) $m \in \{-2, 1\}$; d) $m \in \{1\ 2\}$; e) $m \in \{-1, 1\}$; f) $m \in \mathbb{R}$.

1.410A Sistemul $\begin{cases} ax + y = a \\ bx - y = -b \end{cases}$ este compatibil nedeterminat dacă şi numai dacă

a) $a = 0$; b) $a = b$; c) $a = -b$; d) $ab = 0$; e) $a^2 + b^2 = 0$; f) $a^2 - b^2 = 0$.

1.411A Fie A mulţimea valorilor parametrului real m pentru care sistemul

$$\begin{cases} mx + 2y = 2m - 2 \\ 2x + my = m \end{cases}$$

are soluţie unică. Pentru $m \in A$, notăm $S_m = x_m + y_m$, unde (x_m, y_m) este soluţia sistemului. Avem

a) $A = \mathbb{R}$, $S_m = 1$; b) $A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $S_m = \frac{3m-2}{m+2}$;
c) $A = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, $S_m = \frac{3m}{m+2}$; d) $A = (0, \infty)$, $S_m = \frac{-2}{m+2}$;
e) $A = \{-2, 2\}$, $S_m = 1 + m$; f) $A = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $S_m = \frac{3m-2}{m+2}$.

1.412A Aflaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul linar $\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x + 5y + 4z = 4 \\ x + 2y + z = m \end{cases}$ să fie compatibil nedeterminat ?

a) $m = 2$; b) $m \in \mathbb{R}$; c) $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; d) $m = 1$; e) $m = -2$; f) $m = -1$.

1.413A Următorul sistem matriceal $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ are soluţia

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$;
c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ b\sin\alpha \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\sin\alpha \\ a\cos\alpha \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sin\alpha \\ b\cos\alpha \end{pmatrix}$;
f) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

1.414A Se consideră sistemul $\begin{cases} mx + 2y - z = 2 \\ x + (m+2)\,y - 2z = m + 2 \\ x + y + (m-1)\,z = m + 2 \end{cases}$. Determinaţi m astfel încât sistemul să fie compatibil.

a) $m \neq -1$; b) $m \neq 1$; c) $m \in \mathbb{R}$; d) $m \in \{-1, 1\}$; e) $m = 1$; f) $m = -1$.

1.415B Se consideră sistemul $\begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ 2x - y + 3z - 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x + (a-1)y + 2z + a^5 t = 0 \end{cases}$ şi fie

$A = \left\{ a \in \mathbb{R} \mid \text{sistemul admite şi soluţii diferite de cea banală} \right\}$, iar $S = \sum_{a \in A} a$. Atunci

a) $S = 0$; b) $S = 1$; c) $S = -1$; d) $S = \frac{1}{3}$; e) $S = 2$; f) $S = \frac{2}{3}$.

1.416B Fie k numărul tripletelor $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ pentru care rangul matricei

$$\begin{pmatrix} a^3 & 1 & c^2 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & b^3 \end{pmatrix}$$

este egal cu 1. Atunci

a) $k = 0$; b) $k = 1$; c) $k = 2$; d) $k = 6$; e) $k = 9$; f) există o infinitate de triplete.

1.417B Fie sistemul $\begin{cases} x - \alpha y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = -1 \\ x + y - z = \beta \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Să se determine suma $\alpha +$, dacă sistemul este compatibil nedeterminat.

a) 0; b) -2; c) -3; d) -1; e) 1; f) 3.

1.418B Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} \frac{a}{b} & \frac{b}{c} & \frac{c}{a} \\ a & b & c \\ ab & bc & ca \end{vmatrix}$, unde $a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, este

a) $(a-b)(b-c)(c-a)$; b) $abc(a+b+c)$; c) abc;
d) $(a+b)(b+c)(c+a)$; e) 0; f) $abc(ab+bc+ca)$.

1.419B Să se determine valorile parametrilor reali α şi β pentru care sistemul

$$\begin{cases} 2x - y - 4z = 6 \\ \alpha x - y + z = 2 \\ 2x + \beta y - 4z = 2\beta \end{cases}$$

este compatibil nedeterminat.

a) $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = -1$; b) $\alpha \in \mathbb{R},\ \beta = -1$; c) $\alpha = -1,\ \beta \in \mathbb{R}$; d) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
e) $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{2}{3}$; f) $\alpha = 0, \beta = 0$.

1.420B Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Să se determine matricea $A^2 + 2AB + B^2$.

a) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -11 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 25 & 8 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} 25 & 8 \\ -11 & 14 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$.

1.421B Se dă matricea $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$. Atunci

a) $A^n=\begin{pmatrix} 5^n & 3^n \\ (-4)^n & (-2)^n \end{pmatrix}$; b) $A^n=nA$; c) $A^n=2^nI_2$;
d) $A^n=(2^n-1)A+(2-2^n)I_2$; e) $A^n=3^{n-1}A+2^{n-1}I_2$;
f) $A^n=\begin{pmatrix} 5n+3 & 3(n+1) \\ -4(n+1) & -2(n+2) \end{pmatrix}$.

1.422B Pentru matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, să se calculeze A^n, $n\geq 1$.

a) $A^n=A$; b) $A^n=I_3$; c) $A^n=\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $A^n=\begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
e) matricea nulă; f) $A^n=A^2$.

1.423B Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $n\in\mathbb{N}$; să se calculeze urma (suma elementelor de pe diagonala principală) matricei X care satisface ecuaţia $A^nX=B^n$.
a) n^2-1; b) 0; c) $1-n^2$; d) n^2; e) $-n^2$; f) $2+n^2$.

1.424B Matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ este singulară dacă şi numai dacă
a) $a=b=1$ sau $b=c=1$ sau $c=a=1$; b) $a^2=b^2=c^2$; c) $a=b=c$;
d) $a=b$ sau $b=c$ sau $c=a$; e) $a=b=c\neq 0$; f) $a=b=c=0$.

1.425B Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} m & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care există $a,b,c\in\mathbb{R}$ nu toate nule astfel încât $aA+bB+cC=0$.
a) $m=0$;b) $m=3$; c) $m=-1$; d) $m=\frac{5}{4}$; e) $m=\frac{1}{4}$; f) $m=\frac{1}{2}$.

1.426B Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B=A^{20}$. Atunci

a) $B=-A$; b) $B=A^2$; c) $B=-A^2$; d) $B=I_4$; e) $B=-I_4$; f) $B=A^3$.

1.427B Calculaţi inversa matricei $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, unde $x_1\geq x_2\geq x_3$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3-x^2-x+1=0$.

a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;
d) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; f) nu există.

1.428B Fie matricea $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu elementele $a_{ij}=\begin{cases} \frac{1}{i+1}, & 1\leq j\leq i\leq 3 \\ 0, & 1\leq i<j\leq 3. \end{cases}$
Determinantul lui A are valoarea
a) $\frac{1}{24}$, b) 1; c) 2; d) $\frac{1}{12}$; e) $\frac{1}{6}$; f) $\frac{1}{3}$.

1.429B Să se determine valorile lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} (1+a)x+y+z &= 1 \\ x+(1+a)y+z &= a \\ x+y+(1+a)z &= a^2 \end{cases}$$

este incompatibil.
a) $a=-3, a=0$; b) $a=-1, a=0$; c) $a=0, a=3$; d) $a=-3, a=1$;
e) $a=0$; f) $a\in\mathbb{R}$.

1.430B Se consideră sistemul de ecuaţii cu coeficienţi în $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{cases} mx+y+z=\hat{1} \\ \hat{2}x+\hat{3}y+mz=m \\ x+my+z=m^2 \end{cases}$$

Dacă $A=\{m\in\mathbb{Z}_7 \mid$ sistemul este incompatibil $\}$, atunci
a) $A=\{\hat{2},\hat{3}\}$; b) $A=\varnothing$; c) $A=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3}\}$; d) $A=\{1,3\}$;
e) $A=\{\hat{0},\hat{2},\hat{4},\hat{5},\hat{6}\}$; f) $A=\{\hat{1},\hat{4},\hat{5}\}$.

1.431B Calculaţi expresia $E=\dfrac{x^2+y^2+2z^2+2t^2}{2x^2+2y^2+z^2+t^2}$, unde (x,y,z,t) reprezintă o soluţie nenulă, arbitrară a sistemului omogen $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \\ x+4y+9z+16t=0. \end{cases}$

a) $E=0$; b) $E=1$; c) $E=2$; d) $E=3$; e) $E=15/12$; f) $E=27/31$.

1.432B Fie sistemul $\begin{cases} ax+a^2y+z=1 \\ a^2x+ay+a^2z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$, pentru $a\in\mathbb{R}$. Decideţi:
a) dacă $a\in\{0,1\}$ sistemul este compatibil nedeterminat; b) dacă $a\neq 0$ sistemul este compatibil determinat; c) dacă $a\neq 0$ sistemul este compatibil

nedeterminat; d) dacă $a = 0$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat; e) sistemul are soluţie unică pentru orice $a \in \mathbb{R}$; f) dacă $a \neq 1$ sistemul este de tip Cramer.

1.433B Sistemul liniar $\begin{cases} x + z = a \\ x + (a^2 - 1)y + z = a \end{cases}$ unde $a \in \mathbb{R}$, este compatibil dublu nedeterminat pentru

a) $a = 1$; b) $a = 0$; c) $a \in \varnothing$; d) $a = -1$; e) $a \in \{0, \pm 1\}$; f) $a \in \{\pm 1\}$.

1.434B Fiind dat sistemul liniar $\begin{cases} x + y + \alpha z = -\alpha \\ x + \alpha y + z = \alpha + 1 \\ \alpha x + y + z = \alpha + 1 \end{cases}$, unde α este un parametru real, determinaţi α astfel încât sistemul să admită soluţie unică.

a) $\alpha \in \{-2, 1\}$; b) $\alpha = -2$; c) $\alpha = 1$; d) $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-2, 1\}$; e) $\alpha \neq -2$; f) $\alpha \neq 1$.

1.435C Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = 1 \\ 5x + 4y = m \end{cases}$ să fie compatibil.

a) -28; b) 34; c) 14; d) -17; e) 23; f) -31.

1.436C Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $C = BAB^{-1}$. Să se determine matricea C^{20}.

a) $\begin{pmatrix} 3^{20} & 2^{20} - 3^{20} \\ 0 & 2^{20} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2^{20} & 0 \\ 0 & 3^{20} \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} 2^{20} & 0 \\ 3^{20} - 2^{20} & 3^{20} \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 0 & 2^{20} \\ 3^{20} & 0 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.437C Fie matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq 15$, astfel încât $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $n = 2$; b) $n = 4$; c) $n = 6$; d) $n = 8$; e) $n = 10$; f) $n = 7$.

1.438C Fie A matricea de ordinul n, $(n \geq 2)$, cu toate elementele egale cu 1. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ dacă $I_n + aA$ este inversabilă.

a) $a = 0$; b) $a \neq -\frac{1}{n}$; c) $a = -\frac{1}{n}$; d) $a \in \{0, 1\}$; e) nu există; f) $a \in \mathbb{R}$.

1.439C Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ şi fie S_n suma elementelor de pe diagonala matricei A^n, $n \in \mathbb{N}$. Care afirmaţie este adevărată ?

a) $S_n = 2^n(1 - 2\sin\frac{n\pi}{3})$; b) $S_n = 2^n(1 + 2\sin\frac{n\pi}{3})$; c) $S_n = 2^n(\sqrt{3^n} + (-\sqrt{3})^n)$;
d) $S_n = 2^n(1 - 2\cos\frac{n\pi}{3})$; e) $S_n = 2^n(1 + 2\cos\frac{n\pi}{3})$; f) $S_n = 0$.

1.440C Fie $x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n$ numere reale şi matricele $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ şi $B = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Care din următoarele relaţii este incorectă ?

a) $\operatorname{rang}(AB) \leq 1$; b) $\operatorname{rang}(BA) \leq 1$; c) $\det(AB) = 0$;
d) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$; e) $(AB)^2 = (BA) \cdot (AB)$;
f) $(AB)^2 = (AB) \cdot (BA)$.

1.441C Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \neq O_n$, astfel încât $\det A = 0$. Atunci

a) $(\exists) B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \neq O_n$ astfel încât $AB = O_n$; b) $(\exists) A^{-1}$;
c) $AB = O_n \Rightarrow B = O_n$; d) $(\exists) B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a.î. $AB = O_n$ şi $\det B \neq 0$;
e) $\det {}^tA \neq 0$; f) $\det({}^tAA) \neq 0$.

1.442C Fie D un determinant nenul de ordin 3 ale cărui elemente sunt 1 sau -1. Atunci

a) $D = 1$; b) $D = -1$; c) $|D| = 1$; d) $|D| = 2$; e) $|D| = 4$; f) $D = 2$.

1.443C Calculaţi determinantul $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ ştiind că x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$.

a) 2; b) -2; c) 4; d) -4; e) 1; f) -1.

1.444C Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde ε este o rădăcină cubică complexă a unităţii şi S suma modulelor elementelor matricei X pentru care $AX = B$. Atunci

a) $S = 16$; b) $S = 3$; c) $S = 4$; d) $S = 2 + \sqrt{3}$; e) $S = 1 + \sqrt{3}$; f) $S = 9$.

1.445C Fie A o matrice nesingulară de ordinul n cu determinantul $\Delta = \det A > 0$. Găsiţi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\det(\lambda A) = 1$.

a) $\lambda = \frac{1}{\sqrt[n]{\Delta}}$; b) $\lambda = \Delta$; c) $\lambda = 1$; d) $\lambda = -\Delta$; e) $\lambda = \sqrt[n]{\Delta}$; f) $\lambda = 2$.

1.446C Fie ecuaţia $x^3 + px + q = 0$, având soluţiile x_1, x_2, x_3 şi determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

Atunci valoarea lui Δ^2 este
a) p^3+q^3; b) 0; c) $-p^2+2q^3$; d) $4p^3+27q^2$; e) $27q^2$; f) $-4p^3-27q^2$.

1.447C Fie A şi B două matrice pătrate de acelaşi ordin, cu elemente reale, având proprietatea că suma numerelor de pe diagonala principală (urma matricei) este zero. Considerăm matricele $C_1=A\cdot B, C_2=B\cdot A, C_3=A\cdot B-B\cdot A$. Care dintre aceste matrice are/au aceeaşi proprietate ?
a) toate trei; b) C_1 şi C_2; c) numai C_3; d) numai C_1; e) numai C_2; f) nici una.

1.448C Pentru ce valori ale lui $\lambda\in\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases}\lambda x+y+z=0\\ x+\lambda y+z=0\\ x+y+\lambda z=0\end{cases}$ admite o infinitate de soluţii ?
a) $\lambda\in\mathbb{R}$; b) $\lambda=-2$ sau $\lambda=0$; c) $\lambda=1$ sau $\lambda=0$;
d) $\lambda=-2$ sau $\lambda=2$; e) $\lambda=-2$ sau $\lambda=1$; f) $\lambda<0$.

1.449C Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi fie sistemul $\begin{cases}x+y+z=c\\ ax+by+(a+b)z=0\\ a^2x+b^2y+(a+b)^2z=0.\end{cases}$
Care afirmaţie este adevărată ?
a) Dacă $a=b$, atunci sistemul este compatibil pentru orice $c\in\mathbb{R}$.
b) Dacă $a=0$ şi $b\neq 0$, atunci sistemul este compatibil pentru orice $c\in\mathbb{R}$.
c) Dacă $a\neq b$, atunci sistemul este compatibil determinat, pentru orice $c\in\mathbb{R}$.
d) Dacă $c\neq 0$, atunci sistemul este incompatibil pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$.
e) Dacă $a\neq 0$ şi $b\neq 0$, atunci sistemul este incompatibil pentru orice $c\in\mathbb{R}$.
f) Dacă $a+b\neq 0$, atunci sistemul este compatibil determinat $(\forall)\, c\in\mathbb{R}$.

1.450C Sistemul $\begin{cases}ax+(3a+4)y+2(a+1)z=0\\ ax+(4a+2)y+(a+4)z=0\\ 2x+(3a+4)y+3az=0\end{cases}$ este compatibil dublu nedeterminat dacă şi numai dacă
a) $a=0$; b) $a=-1$; c) $a\in\{-1,0\}$; d) $a\in\{-1,2\}$; e) $a=2$; f) $a\in\{0,2\}$.

1.451C Fie n numărul de soluţii ale sistemului $\begin{cases}|x|+|x+y|=3\\ 2|x|-3|x+y|=-4.\end{cases}$ Atunci
a) $n=0$; b) $n=2$; c) $n=3$; d) $n=4$; e) $n=5$; f) $n=6$.

1.452C Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $a2^n+b3^n+c4^n=0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Atunci
a) nu există a,b,c cu această proprietate; b) $a=b=c=0$; c) $a=0$ sau $a+b+c=0$; d) $abc=0$; e) $a^2+b^2+c^2=1$; f) $abc=-1$.

1.453C Fie sistemul liniar omogen $\begin{cases}x+2y+z=0\\ 2x+9y+z=0\\ x-3y+2z=0\end{cases}$. Calculaţi $\dfrac{x+y+z}{x+y-z}$, unde (x,y,z) este o soluţie nenulă (nebanală) a sistemului.
a) $\frac{1}{12}$; b) $-\frac{1}{11}$; c) $\frac{1}{11}$; d) $-\frac{1}{12}$; e) 1; f) $\frac{2}{3}$.

1.5 Structuri algebrice

1.454A Fie $A_x=\begin{pmatrix}1-x & x\\ x & 1-x\end{pmatrix}$ şi $G=\{A_x | x\in\mathbb{R}\}$ înzestrată cu înmulţirea matricelor. Atunci
a) $(G,\cdot)$ este grup necomutativ; b) G nu este parte stabilă pentru înmulţirea matricelor; c) $(G,\cdot)$ este monoid, dar nu este grup; d) $(G,\cdot)$ nu are element neutru; e) $(G,\cdot)$ nu are elemente simetrizabile; f) $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

1.455A Care dintre mulţimile următoare este parte stabilă pentru legea de compoziţie $x\circ y=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ definită pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
a) $[e,\infty)$; b) $(9,\infty)$; c) $(2,\infty)$; d) $[-2,0)$; e) $[2,\infty)$; f) $(0,2)$.

1.456A Fie $G=(2,\infty)$ şi legea de compoziţie $x\circ y=xy-2x-2y+6$, $(\forall) x,y\in G$. Calculaţi $x\circ x\circ x\circ x$.
a) $(x-2)^4+2$; b) $(x+2)^4-2$; c) $(x-2)^4$; d) $(x+2)^4$; e) x^4-4x^2+6; f) x^4+6.

1.457A Pe $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-2x-2y+6$, $(\forall) x,y\in\mathbb{Z}$. Suma elementelor inversabile din $\mathbb{Z}$ în raport cu legea $\circ$ este
a) 10; b) ∞; c) -1; d) 0; e) 1; f) 4.

1.458A Fie $G=\{x,y,z,t\}$ şi legea de compoziţie definită prin tabela

$\circ$	x	y	z	t
x	y	a	b	z
y	x	y	z	t
z	c	d	y	x
t	z	e	x	f

$(G,\circ)$ este grup dacă şi numai dacă
a) $a=c=x, d=b=z, e=t, f=y$; b) $a=x, d=z, b=e=c=t, f=y$;
c) $a=e=x, d=z, c=t, b=f=y$; d) $a=d=x, b=c=z, e=t, f=y$;
e) $f=x, e=z, b=a=c=t, d=y$; f) $b=x, e=z, a=c=d=t, f=y$.

1.459A Pe mulţimea $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax | a \in \mathbb{R}\}$ se defineşte legea de compoziţie $\star$ prin $(f \star g)(x) = x(f'(x) + g'(x)), x \in \mathbb{R}$. Atunci
a) $(G, \star)$ este grup necomutativ;
b) G nu este parte stabilă pentru legea de compoziţie $\star$;
c) $(G, \star)$ este monoid, dar nu este grup; d) legea $\star$ nu are element neutru;
e) legea $\star$ nu este asociativă; f) $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

1.460A Pe mulţimea $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx | a, b \in \mathbb{R}\}$ se defineşte legea de compoziţie $\star$ prin $(f \star g)(x) = x(f'(x) + g'(x)), (\forall) x \in \mathbb{R}$. Atunci
a) $(G, \star)$ este grup necomutativ;
b) G nu este parte stabilă pentru legea de compoziţie $\star$;
c) $(G, \star)$ este monoid, dar nu este grup; d) legea $\star$ nu are element neutru;
e) legea $\star$ este asociativă; f) $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

1.461A Fie G mulţimea funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de două ori derivabile pe $\mathbb{R}$ care verifică relaţia $f'(x) + 2f(x) = 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$. Pe G se consideră adunarea funcţiilor $h = f + g$ definită prin $h(x) = f(x) + g(x), (\forall) x \in \mathbb{R}$. Atunci
a) $(G, +)$ este grup necomutativ; b) G nu este parte stabilă pentru legea de compoziţie $+$; c) $(G, +)$ este monoid, dar nu este grup; d) legea $+$ nu are element neutru; e) există în G elemente nesimetrizabile; f) $(G, +)$ este grup comutativ.

1.462A Pe mulţimea $G = \{2, 4, 6, 8\} \subset \mathbb{Z}$ definim legea de compoziţie prin: $x * y =$ ultima cifră a produsului numerelor întregi x şi y. Atunci
a) este grup şi simetricul lui 2 este 2; b) este grup şi simetricul lui 2 este 4; c) este grup şi simetricul lui 2 este 6; d) este grup şi simetricul lui 2 este 8; e) nu este grup; f) este grup necomutativ.

1.463A Pe $\mathbb{R}$ definim $x * y = 2\lambda x + \mu y + xy$. Să se determine λ şi μ pentru care această lege de compoziţie este asociativă, comutativă şi 0 este element simetrizabil.
a) $\lambda = 0, \mu = 0$; b) $\lambda = 1/2, \mu = 2$; c) $\lambda = 1/2, \mu = 1$; d) $\lambda = 2/3, \mu = -1$; e) $\lambda = 1/2, \mu = -1$; f) $\lambda = 2/3, \mu = 1$.

1.464A Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziţie $x * y = xy - 2x - 2y + \lambda$ să definească pe $G = (2, +\infty)$ o structură de grup.
a) 2; b) 4; c) 6; d) 8; e) 10; f) 12.

1.465A Pe mulţimea $\mathbb{Q}$ se definesc legile de compoziţie $x \circ y = \frac{1}{4}xy - 2x - 2y + 24$ şi $x * y = x + y + 2, (\forall) x, y \in \mathbb{Q}$. Dacă e_1 şi e_2 sunt elementele neutre în raport cu cele două legi, calculaţi $e_1 * e_2$.
a) 4; b) -6; c) 16; d) 12; e) 10; f) 5.

1.466A Fie inelul $\mathbb{Z}_6$ şi n numărul de soluţii ale ecuaţiei $\hat{2}x = \hat{0}$ (în $\mathbb{Z}_6$). Atunci
a) $n = 1$; b) $n = 0$; c) $n = 2$; d) $n = 3$; e) $n = 4$;f) $n = 6$

1.467A Operaţia $x \star y = x + ay$ unde $a \in \mathbb{R}$ determină un grup abelian pe $\mathbb{R}$ pentru
a) $a = -1$; b) $a = 0$; c) $a = 1$; d) $(\forall) a \in \mathbb{R}$; e) $a = 2$; f) $a \in \varnothing$.

1.468A Pe mulţimea $\mathbb{C}$ definim legea de compoziţie $z \star w = z + w - zw$. Care afirmaţie este corectă ?
a) $(\mathbb{C}, \star)$ este grup abelian; b) orice număr $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ este simetrizabil în raport cu operaţia $\star$; c) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \star)$ este grup abelian; d) operaţia $\star$ nu are element neutru; e) simetricul elementului $i \in \mathbb{C}$ în raport cu operaţia $\star$ este $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; f) operaţia $\star$ nu este asociativă.

1.469A Determinaţi pentru ce valori ale parametrului $\lambda \in \mathbb{R}$, intervalul $(2, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie

$$x \star y = xy - 2x - 2y + \lambda,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

a) $\lambda \in [6, \infty)$; b) $\lambda \in (6, \infty)$; c) $\lambda \in [0, 6]$; d) $\lambda \in (-\infty, 6]$; e) $\lambda = 6$; f) $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.470A Să se rezolve ecuaţia $x^2 - x - \hat{1} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_5$.
a) nu are soluţii; b) $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; c) $x = \hat{1}$; d) $x = \hat{3}$; e) ecuaţia are două soluţii; f) $x = \hat{4}$.

1.471A Pe $\mathbb{R}$ se definesc următoarele legi de compoziţie:

1°	$x * y = \lvert x - y \rvert$;	4°	$x * y = x + y + 1$;
2°	$x * y = xy - 2(x + y)$;	5°	$x * y = \sin(x + y)$;
3°	$x * y = xy - 2x - 3y$;	6°	$x * y = \ln(1 + \lvert xy \rvert)$.

Care dintre acestea este necomutativă?
a) 1°; b) 2°; c) 3°; d) 4°; e) 5°; f) 6°.

1.472A Pentru orice $x \in \mathbb{Z}$ notăm cu $\hat{x}$ şi $\tilde{x}$ clasele lui x în $\mathbb{Z}_5$ şi respectiv $\mathbb{Z}_3$. Să se determine toate numerele $x \in \mathbb{Z}$, $1 \leq x \leq 15$ astfel încât $\hat{x}^2 - \hat{4}\hat{x} + \hat{3} = \hat{0}$ şi $\tilde{2}\tilde{x}^2 + \tilde{x} = \tilde{0}$.
a) 1, 3, 6, 13; b) 1, 3, 6, 15; c) 1, 3, 11, 12, 13; d) 1, 3; e) $\varnothing$; f) 13, 14, 15.

1.473A Fie E un spaţiu vectorial al polinoamelor $P \in \mathbb{R}[X]$ de grad cel mult 3 astfel încât $P(1) = 0$ şi $P'(1) = 0$. Să se indice care din următorii vectori formează o bază pentru E.
a) $1, (X - 1)^3$; b) $(X - 1)^2, X(X - 1)^2$; c) $X, (X - 1)^2$; d) $X - 1, (X - 1)^2$; e) $X - 1, (X - 1)^3$; f) $X^2 - 1, (X - 1)^2$.

1.474A Să se determine numărul real α astfel încât vectorii $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,4,\alpha)$, $v_3 = (1,1,5)$ să formeze o bază pentru $\mathbb{R}^3$.

a) $\alpha = 6$; b) $\alpha = 0$; c) $\alpha = 1$; d) $\alpha \neq 6$; e) $\alpha \neq 0$; f) nu exist'a α.

1.475A Să se determine α real dacă vectorii $v_1 = (1,\alpha,0)$, $v_2 = (0,1,2)$, $v_3 = (2,5,2)$ sunt liniar dependenţi.

a) $\alpha = 2$; b) $\alpha \neq 2$; c) $\alpha = 0$; d) $\alpha \neq 0$; e) $\alpha = 1$; f) $\alpha = 3$.

1.476A Să se indice care din următoarele afirmaţii relativ la vectori din $\mathbb{R}^3$ este adevărată.

a) orice trei vectori formează o bază; b) orice trei vectori liniar dependenţi formează o bază; c) orice doi vectori sunt liniar independenţi; d) dacă doi vectori sunt liniar independenţi; atunci ei generează întreg spaţiul; e) orice trei vectori liniar independenţi formează bază; f) orice vectori liniar independenţi formează bază.

1.477A Se consideră baza următoare B a lui $\mathbb{R}^3$, formată din vectorii $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,0,1)$. Se cer componentele vectorului $v = (0,3,-1)$.

a) $(1,1,1)$; b) $(2,1,0)$; c) $(0,0,3)$; d) $(1,4,0)$; e) $(2,0,3)$; f) $(1,2,-3)$.

1.478A Să se determine coordonatele vectorului $v = (10,2,7)$ în baza $\{f_1,f_2,f_3\}$ a lui $\mathbb{R}^3$, dacă $f_1 = (1,-1,2)$, $f_2 = (2,0,1)$, $f_3 = (1,1,0)$.

a) $(3,1,5)$; b) $(10,2,7)$; c) $(2,1,3)$; d) $(4,0,3)$; e) $(3,-1,3)$; f) $(3,1,1)$.

1.479A Mulţimea $V = \{f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2\}$ formează un spaţiu vectorial peste $\mathbb{Z}_2$. Care este dimensiunea lui V ?

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 7; f) 5.

1.480A Corpul pătratic $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ este spaţiu vectorial de dimensiune doi peste $\mathbb{Q}$. Care dintre următoarele mulţimi este o bază a acestui spaţiu vectorial ?

a) $\{-1,4;\ 1\}$; b) $\{-1;\ 1\}$; c) $\{1;\ 2\}$; d) $\{-1;\ 2\}$; e) $\{1;\ 1,4\}$; f) $\{1;\ \sqrt{2}\}$.

1.481A Fie $e_1 = (1,-1,0)$, $e_2 = (1,1,0)$. Precizaţi e_3 astfel încât e_1, e_2, e_3 să fie vectori liniar independenţi în $\mathbb{R}^3$.

a) $e_3 = (0,0,1)$; b) $e_3 = (2,-2,0)$; c) $e_3 = (0,0,0)$; d) $(-2,2,0)$; e) $(5,5,0)$; f) $(2,3,0)$.

1.482B Dacă p este numărul soluţiilor în $\mathbb{Z}_{12}$ ale sistemului $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{5}y = \hat{7} \\ \hat{3}x + \hat{9}y = \hat{6} \end{cases}$, atunci

a) $p = 0$; b) $p = 4$; c) $p = 2$; d) $p = 5$; e) $p = 6$; f) $p = 3$.

1.483B Fie $M = \{x \in \mathbb{Z}_{60} \mid x^3 = \hat{2}\}$ şi fie k numărul elementelor lui M. Decideţi:

a) $M = \varnothing$; b) $k = 1$; c) $k = 3$; d) $k = 5$; e) $k = 6$; f) $k = 9$.

1.484B Fie $a, b \in \mathbb{Z}$. Pe $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziţie $x \star y = axy + 2(x+y) + b$. Se presupune că $(\mathbb{Z}, \star)$ este monoid şi se notează cu k numărul elementelor sale simetrizabile. Atunci

a) $k = 1$; b) $k = 2$; c) $k = 3$; d) $k = 4$; e) $k = 6$; f) există $a, b \in \mathbb{Z}$ pentru care monoidul admite o infinitate de elemente simetrizabile.

1.485B Fie $G = (-1,1)$ şi legea $x \star y = \frac{ax+by}{1+xy}$, $(\forall)\, x, y \in G$. Notăm $K = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (G, \star) \text{ este grup}\right\}$ şi $S = \sum_{(a,b)\in K} (a+b)$. Atunci

a) $S = 3$; b) $S = 0$; c) $S = 2$; d) $S = 6$; e) $S = 4$; f) K este infinită.

1.486B Să se rezolve în $\mathbb{Z}_{10}$ sistemul $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{8} \\ x + \hat{6}y = \hat{3}. \end{cases}$

a) $x = \hat{1}, y = \hat{2}$; b) $x = \hat{1}, y = \hat{3}$; c) $x = \hat{2}, y = \hat{3}$; d) $x = \hat{3}, y = \hat{4}$; e) $x = \hat{1}, y = \hat{4}$; f) nu are soluţii.

1.487B Fie $F_k = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ bijecţie şi } f(k) = k\}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. Pe fiecare mulţime F_k definim legea de compoziţie "$\circ$" care reprezintă compunerea obişnuită a funcţiilor. În aceste condiţii $(F_k, \circ)$ este grup

a) numai pentru $k = 7$; b) pentru orice $k \in \mathbb{Z}$; c) numai pentru $k \in \mathbb{N}$; d) numai pentru $k = 0$; e) numai pentru $k = 1$; f) pentru orice $k \in \mathbb{Z}, (F_k, \circ)$ nu este grup.

1.488B Aflaţi $m \in \mathbb{Z}_3$ dacă polinomul $X^2 + X + m$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}_3$.

a) $m = \hat{0}$; b) $m = \hat{1}$; c) $m \neq \hat{0}$; d) $m = \hat{2}$; e) $m \neq \hat{2}$; f) nu există.

1.489B Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\ n \in \mathbb{Z} \right\}$ şi fie $\cdot$ înmulţirea matricelor. Atunci

a) $(G,\cdot)$ este grup izomorf cu grupul $(\mathbb{C},+)$; b) $(G,\cdot)$ este grup necomutativ; c) $(G,\cdot)$ este grup izomorf cu grupul $(\mathbb{R},+)$; d) $(G,\cdot)$ nu este grup; e) $(G,\cdot)$ este grup izomorf cu grupul $((0,\infty),\cdot)$; f) $(G,\cdot)$ este grup izomorf cu grupul $(\mathbb{Z},+)$.

1.490B Fie G un grup cu n elemente, $a \in G$ şi $A = \{ax \mid x \in G\}$. Atunci A are

a) un element; b) n elemente; c) $n-1$ elemente; d) $n+1$ elemente; e) $\frac{n}{2}$ elemente; f) două elemente.

1.491B Să se afle câte soluţii are sistemul $\begin{cases} \widehat{3}x+\widehat{3}y=\widehat{3} \\ \widehat{3}x+\widehat{5}y=\widehat{1} \end{cases}$ în inelul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$.

a) 4; b) 3; c) 6; d) 2; e) o soluţie; f) nici o soluţie.

1.492B Matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sunt divizori ai lui zero în $\mathcal{M}_2[\mathbb{R}]$ dacă şi numai dacă

a) $a=b=c=d\in\mathbb{R}$; b) $a=-b, c=-d$ sau $a=c, b=d$; c) $a=-b, c=-d$; d) $a=b=c=d=1$; e) $a=c, b=d$; f) $a=b, c=d$ sau $a=-c, b=-d$.

1.493B Fie $\sigma,\gamma\in\mathcal{S}_3$, $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\gamma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se găsească $\xi\in\mathcal{S}_3$ astfel încât $\sigma\circ\xi=\gamma$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1.494B Pe mulţimea $I=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ se consideră legile de compoziţie $*$ şi $\circ$ definite de

$x*y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y)$, $\quad x\circ y=\frac{x+y}{2}$, $\forall(x,y)\in I$. Atunci

a) $(I,*,\circ)$ este corp; b) $(I,\circ,*)$ este corp; c) $(I,*,\circ)$ este inel; d) $(I,\circ,*)$ este inel; e) $(I,\circ)$ este grup; f) $(I,*)$ este grup.

1.495B Câte polinoame de grad cel mult 4 sunt în inelul $\mathbb{Z}_2[X]$?

a) 32; b) 64; c) 16; d) 26; e) 54; f) 8.

1.496B Fie $G=\{I,A,B\}$ unde $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Care din următoarele şase afirmaţii este adevărată ?

a) $AB\neq BA$; b) $AB-BA=I$; c) $AB=BA=I$ şi G nu este stabilă la înmulţirea matricelor; d) $AB=BA=I$, $A^2=B$, $B^2=A$ şi G este grup relativ la înmulţirea matricelor; e) G este parte stabilă, dar nu este grup relativ la înmulţirea matricelor; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

1.497B Determinaţi elementele inversabile ale inelului $I=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ cu operaţiile $(a_1,b_1)+(a_2+b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$, $\qquad (a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2,b_1b_2)$.

a) $(1,1),(-1,-1),(0,1),(1,0)$; b) $(1,-1),(-1,1),(-1,0),(0,-1)$; c) $(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$; d) $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$; e) $(1,-1),(-1,1),(1,0),(0,1)$; f) $(1,1),(0,1),(0,0)$.

1.498B Fie $M=\{A(a)\mid a\in(0,\infty)\}$ unde $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & \ln a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a\in(0,\infty)$.

Care dintre afirmaţiile următoare este adevărată ?

a) $(M,\ \cdot\ )$ nu este grup; b) $(M,\ \cdot\ )$ este grup comutativ izomorf cu $(\mathbb{R}_+^*,\ \cdot\ )$; c) $(M,\ \cdot\ )$ este grup comutativ, dar nu este izomorf cu $(\mathbb{R}_+^*,\ \cdot\ )$; d) M nu este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricilor; e) există $a\in(0,\infty)$ astfel încât $A(a)$ să fie singulară; f) $I_3\notin M$.

1.499B Fie V mulţimea polinoamelor din $\mathbb{R}[X]$ care au gradul cel mult 5 şi rădăcina 4. Să se determine dimensiunea spaţiului vectorial real V.

a) 1; b) 6; c) 4; d) 3; e) 5; f) 2.

1.500B Se notează cu S spaţiul vectorial real al tripletelor $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ astfel încât $x+y-2z=0$. Să se indice care din vectorii următori formează bază pentru S.

a) $(1,1,1)$; b) $(2,0,1)$ şi $(0,2,1)$; c) $(2,0,1)$; d) $(1,1,1)$, $(2,0,1)$ şi $(0,2,1)$; e) $(1,0,0)$ şi $(0,1,0)$; f) $(1,-1,0)$ şi $(2,-2,0)$.

1.501B Să se determine dimensiunea spaţiului vectorial al matricelor simetrice din $M_3(\mathbb{R})$.

a) 6; b) 5; c) 4; d) 3; e) 2; f) 1.

1.502B Se consideră aplicaţia liniară $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=(x-y,y-z)$. Să se determine mulţimea N a vectorilor din $\mathbb{R}^3$ a căror imagine prin f este vectorul nul.

a) $N=\{(0,0,0)\}$; b) $N=\{(x,x,x)\in\mathbb{R}\}$; c) $N=\{(x,y,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$; d) $N=\{(0,0,1),(1,0,1)\}$; e) $N=\mathbb{R}^3$; f) N este mulţimea vidă.

1.503B Pentru ce valori ale numărului real α, aplicaţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(\alpha x+y,2x+3y)$ este un izomorfism liniar.

a) $\alpha=\frac{2}{3}$; b) $\alpha=1$; c) $\alpha=0$; d) $\alpha\neq 0$; e) $\alpha\neq\frac{2}{3}$; f) $\alpha\neq 1$.

1.504B Fie $u(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$. Precizaţi perechea de funcţii v,w astfel încât u,v,w să fie vectori liniar independenţi în spaţiul vectorial real al funcţiilor reale.

a) $v(x)=xe^x, w(x)=e^{2x}$; b) $v=2u, w(x)=x$; c) $v=3u$, $w(x)=1$; d) $v(x)=w(x)=x$; e) $v(x)=\operatorname{ch}x$, $w(x)=e^x$; f) $v=\operatorname{sh}x$, $w(x)=e^{-x}$.

1.505B Dimensiunea subspaţiului vectorial $D=\{(x,y,z)\mid x=y=z\}\subset R^3$ este

a) 5; b) 2; c) 3; d) 4; e) 1; f) 6.

1.506B Dimensiunea subspaţiului vectorial $P = \{(x, y, z) | x + y + z = 0\} \subset R^3$ este

a) 4; b) 1; c) 3; d) 2; e) 5; f) 6.

1.507B Numărul maxim de vectori liniar independenţi în mulţimea soluţiilor sistemului este $\begin{cases} x - y + 2z + 4t = 0 \\ 2x + y - 3z + t = 0 \end{cases}$

a) 3; b) 1; c) 2; d) 4; e) 5; f) 6.

1.508C Pe mulţimea $\mathbb{R}_1[X]$ a polinoamelor de grad ≤ 1 cu coeficienţi reali definim două operaţii "+" şi "$*$" în felul următor: dacă $f = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$ şi $g = cX + d \in \mathbb{R}_1[X]$, atunci $f + g = h$ şi $f * g = p$, unde

$$h = (a + c)X + b + d, \ p = (ad + bc - ac)X + bd - ac.$$

În aceste condiţii, despre $(\mathbb{R}_1[X], +, *)$ se pote afirma

a) este inel fără a fi corp; b) este corp şi inversul lui $X + 1$ este X; c) este corp şi inversul lui $X + 1$ este $-X$; d) este corp şi cele două elementre neutre sunt 0 şi X; e) este corp şi cele două elementre neutre sunt X şi 1; f) este corp necomutativ.

1.509C În $M_2(\mathbb{Z}_5)$ se consideră ecuaţia $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{4} & \hat{3} \end{pmatrix}$. Care dintre afirmaţiile următoare este adevărată ?

a) ecuaţia are soluţie unică; b) ecuaţia are trei soluţii; c) ecuaţia are patru soluţii; d) ecuaţia nu are soluţii; e) ecuaţia are două soluţii; f) ecuaţia are cel puţin trei soluţii.

1.510C Pe $\mathbb{R}$ se consideră legile de compoziţie $x \oplus y = mx + ny - 1$, $x \odot y = 2xy - 2x - 2y + p$. Să se determine m, n şi p astfel încât $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ să fie corp.

a) $1, 2, 3$; b) $1, 1, 3$; c) $m = n = 1$, $p \in \mathbb{R}$, d) $1, 1, 1 + i$; e) problema nu are soluţie; f) $1, 1, 0$.

1.511C Fie $G = \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}\} \subset \mathbb{Z}_8$, $H = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \widehat{11}\} \subset \mathbb{Z}_{12}$ familiile elementelor inversabile din inelele $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{12}$. Care dintre următoarele şase afirmaţii este adevărată ?

a) G şi H sunt subinele; b) H şi G nu sunt stabile la înmulţire; c) nu este verificată condiţia $x^2 = e = \hat{1}$, $\forall x$ din G sau H; d) G şi H sunt grupuri relativ la înmulţirea claselor şi sunt izomorfe; e) G şi H nu sunt izomorfe cu grupul lui Klein; f) afirmaţiile precedente sunt false.

1.512C Câte elemente are inelul M al matricelor pătrate, de ordinul doi, cu elemente în inelul claselor de resturi modulo 2 ?

a) 12; b) 8; c) 9; d) 16; e) 32; f) 25.

1.513C Elementul simetric al unui element x relativ la legea $x \star y = \sqrt[n]{y^{\log_n x}}$, $(\forall)\, x, y \in (0, \infty) \backslash \{1\}$, pentru $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ fixat, este

a) $n^{n \log_x n}$; b) $n^{n^2 \log_x n}$; c) $n^{2 \log_x n}$; d) $n^2 \log_x n$; e) $\log_x n$; f) $n^{\log_x n}$.

1.514C Fie $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$. Se consideră $x \star y = x^{\ln y}$, $x, y \in G$. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată ?

a) legea $\star$ nu este asociativă; b) legea $\star$ este asociativă dar nu este comutativă; c) G nu este parte stabilă în raport cu legea $\star$; d) $(G, \star)$ este grup abelian; e) legea $\star$ nu admite element neutru; f) există un singur element simetrizabil.

1.515C Fie K şi L două corpuri comutative şi $f : K \to L$ un morfism de inele. Atunci f este

a) bijectivă; b) surjectivă; c) injectivă; d) nulă; e) constantă; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

1.516C Fie $(G, \cdot)$ un grup arbitrar şi fie H şi K două submulţimi în G. Atunci

a) H este subgrup în $G \Leftrightarrow H$ este submulţime finită; b) H este subgrup în $G \Leftrightarrow H$ conţine elementul neutru; c) dacă H şi K sunt subgrupuri în G, atunci $H \cup K$ este subgrup în G; d) dacă G este mulţime finită, atunci H este subgrup $\Leftrightarrow H$ conţine elementul neutru; e) dacă G este mulţime finită, atunci H este subgrup $\Leftrightarrow (H, \cdot)$ este parte stabilă; f) dacă G este grupul permutărilor de patru obiecte, atunci există H şi K subgrupuri în G astfel încât $H \cap K$ să nu fie subgrup.

1.517C Mulţimea matricelor de forma $M(x) = \begin{pmatrix} 2 - x & x - 1 \\ 2(1 - x) & 2x - 1 \end{pmatrix}$, $x \neq 0$, formează relativ la înmulţirea matricelor un grup izomorf cu grupul multiplicativ $\mathbb{R}^*$. Atunci

a) $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} -30 & 31 \\ -62 & 63 \end{pmatrix}$; c) $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$; d) $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -30 & 31 \end{pmatrix}$; e) $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; f) $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.518C Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{Z}_3$ polinomul $\hat{2}X^3 + (a + \hat{2})X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$?

a) $a = \hat{1}$; b) $a = \hat{2}$; c) $a = \hat{0}$; d) $a \neq \hat{1}$; e) $a \neq \hat{2}$; f) $a \neq \hat{0}$.

1.519C Să se indice care din aplicaţiile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ următoare este liniară.

a) $f(x, y) = x + y^2$; b) $f(x, y) = -x - |y|$; c) $f(x, y) = |x + y|$; d) $f(x, y) = -2x$; e) $f(x, y) = xy$; f) $f(x, y) = x + y = 1$.

1.520C Să se determine perechile (m, n) de numere reale dacă pentru aplicaţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (mx + y, 2x + ny)$ avem $f \circ f = 3f$

a) $(1, 2)$; b) $(2, 1)$; c) $(0, 0)$; d) $(1, 2)$ şi $(2, 1)$; e) $(1, 0)$; f) $(1, 1)$.

1.521C Să se determine matricea A_f asociată aplicaţiei liniare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y, 7x - 3y)$.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1.522C Se consideră aplicaţiile liniare $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definite prin $f(x, y) = (2x + y, x - y)$; $g(x, y) = (y, x)$. Să se determine aplicaţia $h = g \circ f - f \circ g$.

a) $h(x, y) = (-3y, 3x)$; b) $h(x, y) = (x + y, 3x - 5y)$; c) $h(x, y) = (x + y, 2x)$; d) $h(x, y) = (x + y, -x - 5y)$; e) $h(x, y) = (2x - y, y)$; f) $h(x, y) = (y, 5x - 3y)$.

1.523C Se consideră în planul $P = \mathbb{R}^2$ un sistem ortogonal xOy şi dreapta $D : x - 2y = 0$. Pentru orice punct $M \in P$ se notează cu M' proiecţia lui M pe D. Să se determine matricea asociată aplicaţiei liniare $F : P \to P$, $F(M) = M'$, relativ la baza canonică din $\mathbb{R}^2$.

a) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.524C Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Să se determine perechea (p, q) de numere reale astfel încât notând cu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicaţia liniară asociată lui A în baza canonică din $\mathbb{R}^2$, să aibă loc relaţia $f \circ f = pf + qI$, unde I este aplicaţia identică.

a) $(1, 0)$; b) $(0, 2)$; c) $(-2, 7)$; d) $(2, 5)$; e) $(2, -7)$; f) $(-2, 5)$.

Capitolul 2

Analiză matematică

2.1 Numere reale. Progresii. Şiruri

2.525A Şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin recurenţă de relaţia $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $x_0 = 1$, este

a) strict crescător; b) strict descrescător; c) constant; d) progresie aritmetică cu raţia 1; e) progresie geometrică cu raţia 2; f) oscilant.

2.526A Să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii referitoare la şirul $x_n = \sin \frac{n\pi}{4}$, $n \in \mathbb{N}$, este adevărată

a) este constant; b) este convergent; c) este format din două subşiruri convergente;

d) are limita $+\infty$; e) este format din două subşiruri nemărginite; f) este format din mai mult de două subşiruri convergente.

2.527A Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este o progresie aritmetică şi $a_1 = 23$, $a_n = 5$, $r = -2$, atunci

a) $n = 10$, $S_n = 140$; b) $n = 20$, $S_n = 140$; c) $n = 10$, $S_n = 150$; d) $n = 15$, $S_n = 150$; e) $n = 30$, $S_n = 200$; f) $n = 10$, $S_n > 140$.

2.528A Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este o progresie aritmetică şi $a_1 = 3$, $a_n = 39$, $S_n = 210$, atunci

a) $r = 2$, $n = 10$; b) $r = 4$, $n = 10$; c) $r = 6$, $n = 20$;
d) $r = 2$, $n > 10$; e) $r > 2$, $n = 20$; f) $r = 8$, $n \leq 10$;

2.529A Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este o progresie aritmetică cu $a_1 \geq 0$ şi $a_n = 18$, $r = 2$, $S_n = 88$, atunci

a) $a_1 = 2$, $n = 10$; b) $a_1 = 4$, $n = 10$; c) $a_1 = 6$, $n = 20$;
d) $a_1 = 4$, $n = 8$; e) $a_1 = -2$, $n = 11$; f) $a_1 > 4$, $n = 8$.

2.530A Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este o progresie aritmetică cu raţie pozitivă astfel încât $n \geq 5$, $a_2 + a_4 = 16$, şi $a_1 a_5 = 28$, atunci

a) $a_1 = 2, r = 3$; b) $a_1 = 4, r = 1$; c) $a_1 = 6, r = 2$;
d) $a_1 > 4, r = 3$; e) $a_1 = 14, r = -3$; f) $a_1 > 4, r = 3$.

2.531A Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este o progresie geometrică cu raţie negativă astfel încât $n = 9$, $a_1 = 5$, $a_n = 1280$, atunci

a) $S_n = 255, r = -2$; b) $S_n = 455, r = -3$; c) $S_n = 2555, r = 2$; d) $S_n < 500$, $r = -4$; e) $S_n = 855, r = -2$; f) $S_n > 9999, r = -1$.

2.532A Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este o progresie geometrică cu toţi termenii pozitivi astfel încât $n = 3$, $a_3 - a_1 = 136$, $S_n = 221$, atunci

a) $a_3 = 51$; b) $a_3 = 150$; c) $a_3 = 153$; d) $a_3 > 200$; e) $a_3 = 215$; f) $a_3 = 151$.

2.533A Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este o progresie geometrică cu toţi termenii pozitivi astfel încât $n = 7$, $a_1 + a_2 + a_3 = 26$, $a_5 + a_6 + a_7 = 2106$, atunci

a) $a_7 = 5108$; b) $a_7 = 1506$; c) $a_7 = 1530$; d) $a_7 > 2000$; e) $a_7 = 2154$; f) $a_7 = 1458$.

2.534A Termenul general al şirului $\frac{2}{1\cdot 3}, \frac{4}{3\cdot 5}, \frac{6}{5\cdot 7}, \frac{8}{7\cdot 9}, \cdots$ definit pentru $n \geq 1$ este

a) $\frac{2^n}{4n^2-1}$; b) $\frac{2n}{4n^2-1}$; c) $\frac{2n}{(4n-3)(4n-1)}$; d) $\frac{2(n+1)}{4n^2-1}$; e) $\frac{2n}{n(n+2)}$; f) $\frac{n}{4n^2-1}$.

2.535A Termenul general al şirului $0, -\frac{1}{9}, \frac{4}{16}, -\frac{9}{25}, \frac{16}{36}, \cdots$ definit pentru $n \geq 1$ este

a) $(-1)^n \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$; b) $(-1)^{n-1} \frac{n^2}{(n+2)^2}$; c) $(-1)^{n-1} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}$; d) $(-1)^{n-1} \frac{(n-1)^2}{(n+2)^2}$;
e) $(-1)^n \frac{n^2}{(n+2)^2}$; f) $(-1)^{n-1} \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$.

2.536A Termenul general al şirului $2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, \cdots$ definit pentru $n \geq 1$ este

a) $\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$; b) $\frac{n^2}{n+1}$; c) $\frac{n^2-1}{n}$; d) $\frac{n^2+1}{n+1}$; e) $\frac{n^2+1}{n}$; f) $\frac{(n+1)^2+1}{n+1}$.

2.537A Să se precizeze care dintre afirmaţiile următoare, referitoare la şirul

$$a_n = \frac{C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots}{C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots}, \ n \geq 1$$

este adevărată.

a) şirul este constant; b) şirul este strict crescător; c) şirul este strict descrescător; d) şirul are limita 0; e) şirul are limita ∞; f) şirul nu are limită.

2.538A Să se precizeze care dintre afirmaţiile următoare, referitoare la şirul $a_n = \cos \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, este adevărată.

a) şirul este constant; b) şirul este strict crescător; c) şirul este strict descrescător; d) şirul este convergent; e) şirul este format din trei subşiruri convergente la limite diferite; f) şirul conţine patru subşiruri convergente la limite diferite.

2.539A Se consideră şirul $a_n = \min\{n, 10\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci

a) şirul este constant; b) şirul este strict crescător; c) şirul este strict descrescător; e) şirul conţine două subşiruri convergente la limite diferite; f) şirul este convergent.

2.540A Se consideră mulţimea $A = \{\sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4\}$. Avem:

a) $\max A = \sin 1$, $\min A = \sin 3$; b) $\max A = \sin 4$, $\min A = \sin 1$;
c) $\max A = \sin 2$, $\min A = \sin 4$; d) $\max A = \sin 3$, $\min A = \sin 4$;
e) m x $A = \sin 3$, $\min A = \sin 1$; f) $\max A = \sin 1$, $\min A > 0$.

2.541A Valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\left|\frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{10}$ sunt

a) $n = 0$; b) $n \in \{0, 1\}$; c) $1 < n < 10$; d) $n > 10$; e) $0 \leq n \leq 3$; f) $n \geq 5$.

2.542A Se consideră mulţimea $A = \left\{\frac{n+1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Să se determine $\max A$.

a) $\frac{1}{2}$; b) 2; c) ∞; d) 1; e) n; f) 0.

2.543A Fie ε_1 şi ε_2 erorile absolute care se fac atunci când se folosesc aproximaţiile $\pi^2 \cong 10$ şi respectiv $e^3 \cong 20$. Avem

a) $\varepsilon_1 < \frac{5}{8}$, $\varepsilon_2 < \frac{1}{5}$; b) $\varepsilon_1 < \frac{1}{5}$, $\varepsilon_2 < \frac{1}{5}$; c) $\varepsilon_1 < \frac{1}{5}$, $\varepsilon_2 < \frac{1}{20}$; d) $\varepsilon_1 < \frac{13}{100}$, $\varepsilon_2 < \frac{1}{6}$;
e) $\varepsilon_1 < \frac{1}{5}$, $\varepsilon_2 < \frac{7}{100}$; f) $\varepsilon_1 = \frac{13}{100}$, $\varepsilon_2 = \frac{2}{25}$.

2.544A Şirul $(u_n)_n$ satisface condiţia $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ pentru orice n şi $u_0 \neq 3$. Dacă şirul $(u_n + \alpha)_n$ este o progresie geometrică, atunci valoarea lui α este

a) $\alpha = -3$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3$; b) $\alpha = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; c) $\alpha = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$;
d) $\alpha = -1$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; e) $\alpha = -3$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$; f) $\alpha = 3$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -3$.

2.545A Fie şirurile $(a_n), (b_n), (c_n)$, $n \in \mathbb{N}$, definite prin $a_n = 2001 - 667n$, $b_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$, $c_n = (-1)^n + n$. Despre aceste şiruri se poate afirma

a) toate trei sunt progresiiaritmetice; b) toate trei sunt progresii geometrice; c) nici un şir nu este progresie aritmetică; d) nici un şir nu este progresie geometrică; e) (a_n) este progresie aritmetică, (b_n) este progresie geometrică, (c_n) nu este progresie; f) (a_n) şi (c_n) sunt progresii aritmetice, (b_n) este progresie geometrică.

2.546A Fie şirul (a_n), unde $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = a_n - \dfrac{1}{n(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine termenul general al şirului.

a) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$; b) $a_n = \frac{1}{n+1}$; c) $a_n = \frac{1}{n}$; d) $a_n = \frac{n+1}{n}$; e) $a_n = \frac{n-1}{n}$; f) $a_n = \frac{1}{n!}$.

2.547A Câte puncte de acumulare are mulţimea $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 9\right\}$?

a) două; b) patru; c) o infinitate; d) nici un punct; e) unul; f) trei.

2.548A Să se găsească domeniul maxim de definiţie D al funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}}.$$

a) $[1, \infty)$; b) $(-1, 1)$; c) $(1, 10)$; d) $(5, 15)$; e) $[-1, 2]$; f) $[0, 7]$.

2.549A Fie mulţimea $A = \{\cos 1, \cos 2, \cos 3, \cos 4, \cos 5\}$. Determinaţi $\max A$.

a) $\cos 5$; b) $\cos 1$; c) 1; d) nu există; e) 5; f) $\cos 3$.

2.550A Un şir de numere reale este convergent dacă şi numai dacă

a) este monoton; b) este mărginit; c) conţine subşiruri convergente; d) orice subşir al său este convergent; e) este monoton şi mărginit; f) diferenţa a doi termeni consecutivi tinde la zero.

2.551A Să se determine valorile lui t pentru care şirul $f_n(t) = t^n e^{-t}$, $t \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ este o progresie aritmetică.

a) $t = 2$; b) $t = 3$; c) $t \in \{0, 1\}$; d) $t = 4$; e) $t \in (0, 1)$; f) $t = \frac{1}{2}$.

2.552A Suma termenilor progresiei geometrice $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots, \dfrac{1}{2^{10}}$ este

a) $\frac{2^{10}-2}{2^9}$; b) 2; c) $\frac{2^{12}-2}{2^{11}}$; d) $\frac{2^{11}-2}{2^{10}}$; e) $\frac{2^{10}-2}{2^{11}}$; f) $\frac{2^{12}-2}{2^{13}}$.

2.553A Fie $q \in \mathbb{R}$ şi şirurile $a_n = q^n$, $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Care afirmaţie este adevărată ?

a) dacă $q \in [0, 1]$, atunci a_n şi b_n sunt descrescătoare;
b) a_n este convergent $\Leftrightarrow$ b_n este convergent;
c) a_n este mărginit $\Leftrightarrow$ b_n este mărginit; d) a_n şi b_n sunt convergente $\Leftrightarrow$ $|q| \le 1$;
e) a_n şi b_n sunt mărginite $\Leftrightarrow$ $|q| \le 1$; f) a_n şi b_n sunt convergente $\Leftrightarrow$ $|q| < 1$.

2.554B Fie şirul $(a_n, n \ge 1)$ care formează o progresie aritmetică. Ştiind că $a_1 + a_5 + a_9 = 51$, aflaţi $S = a_3 + a_4 + a_5 + a_8$.

a) $S = 60$; b) $S = 54$; c) $S = 72$; d) $S = 81$; e) $S = 68$; f) $S = 90$.

2.555B Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ o progresie aritmetică în care $a_{11} = 15$. Calculaţi $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{21}$.

a) $S = 315$; b) $S = 204$; c) $S = 210$; d) $S = 220$; e) $S = 330$; f) S nu poate fi determinat.

2.556B Care din următoarele afirmaţii este adevărată ?

a) orice şir care are limita ∞ este crescător; b) există şiruri convergente care sunt nemărginite; c) un şir este convergent dacă şi numai dacă este monoton şi mărginit; d) un şir este convergent dacă şi numai dacă are limită; e) orice şir monoton şi mărginit este convergent; f) orice şir nemărginit are limita ∞ sau $-\infty$.

2.557B Mulţimea A formată din punctele de acumulare ale mulţimii $B = \left\{\sin\left(\dfrac{n\pi}{4} + \dfrac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}\right\}$ este

a) $A = \{-1, +1\}$; b) $A = \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$; c) $A = \{-1, 0, +1\}$;
d) $A = \left\{-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right\}$; e) $A = \varnothing$; f) $A = \{0\}$.

2.558B Dacă $B = \left\{x_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right), n \in \mathbb{N}\right\}$, $m = \min B$, $M = \max B$, atunci

a) $m = -1$, $M = 1$; b) $m = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $m = -\dfrac{1}{2}$, $M = \frac{1}{4}$; d) $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $M = \frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $m = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$, $M = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$; f) $m = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$, $M = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$.

2.559B Fie x_n un şir fixat. Care afirmaţie este adevărată ?

a) dacă subşirurile x_{2n} şi x_{2n+1} sunt convergente, atunci x_n este şir convergent; b) x_n este şir convergent dacă şi numai dacă subşirurile x_{2n}, x_{2n+1} şi x_{3n} sunt convergente; c) dacă x_n este divergent, atunci cel puţin unul din subşirurile x_{2n} şi x_{2n+1} este divergent; d) x_n este convergent dacă şi numai dacă subşirurile x_{2n} şi x_{3n} sunt convergente; e) dacă x_n este nemărginit, atunci subşirul x_{3n} este nemărginit; f) dacă x_{2n} şi x_{2n+1} sunt subşiruri crescătoare, atunci x_n este crescător.

2.560B Fie $(a_n, n \in \mathbb{N}^*)$ o progresie aritmetică cu raţia nenulă. Ştiind că suma primilor n termeni ai progresiei este cât o treime din suma următorilor n termeni, să se calculeze valoarea expresiei $\dfrac{S_{3n}}{S_n}$.

a) 0; b) 2; c) 4; d) 9; e) 8; f) $\frac{1}{3}$.

2.561B Să se determine tripletele de numere reale (x, y, z) astfel încât $x + y + z = 3$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

a) $(1,1,1)$; b) nu există; c) există o infinitate; d) $(1,1,1)$ şi $(-1,-1,3)$; e) există un număr finit; f) $(-1,-1,-1)$.

2.562B Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir crescător de numere reale, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie descrescătoare. Ce se poate spune despre monotonia şirurilor $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite prin $b_n = f(a_n)$ şi $c_n = g(a_n), n \in \mathbb{N}$?

a) $(b_n), (c_n)$ sunt crescătoare; b) $(b_n), (c_n)$ sunt descrescătoare; c) (b_n) este crescător, (c_n) este descrescător; d) (b_n) este descrescător, (c_n) este crescător; e) (b_n) este crescător, (c_n) nu este monoton; f) (b_n) nu este monoton, (c_n) este descrescător.

2.563B Fie o progresie geometrică cu $a_5 = 61$ şi $a_{11} = 1647$. Să se afle a_7.

a) 190; b) 913; c) 173; d) 183; e) 175; f) 215.

2.564B Se consideră expresia $E(x) = (\ln x)^{\ln x}$. Fie D mulţimea pe care $E(x)$ are sens. Atunci D este

a) mărginită; b) un şir; c) un interval infinit; d) reuniunea dintre un şir şi un interval; e) un interval finit; f) $\mathbb{R}$.

2.565B Punctele de acumulare ale mulţimii $\left\{(-1)^n \frac{n+1}{3n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ sunt

a) $-\frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{3}$ şi $-\frac{2}{3}$; c) $\varnothing$; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{3}$ şi $-\frac{1}{3}$; f) 0.

2.566B Care din următoarele proprietăţi asigură faptul că şirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton crescător ?

a) şirul este o progresie geometrică cu termeni pozitivi; b) $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$; c) şirul este o progresie aritmetică cu termeni pozitivi; d) există $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $l \in \mathbb{R}$ şi $l \geq a_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$; f) nici una din proprietăţile enunţate nu asigură monotnia şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.567C Se consideră şirul cu termenul general $x_n = \dfrac{\sin n!}{1+4^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Atunci

a) (x_n) este monoton şi mărginit; b) (x_n) este monoton; c) $\sup x_n = 0$; d) (x_n) este convergent; e) $\inf x_n = 0$; f) $x_n \geq 0, (\forall) n \in \mathbb{N}$.

2.568C Se consideră aplicaţia $f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1,1]$, definită prin $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, $f(\infty) = 1$, $f(-\infty) = -1$. Atunci

a) f nu este injectivă; b) f nu este surjectivă; c) f nu este bijectivă; d) f este bijectivă şi $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \in [-1,1]$; e) f este bijectivă şi $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \in (-1,1)$; f) f este bijectivă, $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$, $x \in (-1,1)$, $f^{-1}(-1) = -\infty$, $f^{-1}(1) = \infty$.

2.569C Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită pe $\mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie monotonă pe $\mathbb{R}$. Ce se poate spune despre şirurile $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite prin: $b_n = (f \circ g)(a_n)$ şi $c_n = (g \circ f)(a_n), n \in \mathbb{N}$?

a) (b_n) şi (c_n) sunt mărginite; b) (b_n) şi (c_n) sunt nemărginite; c) (b_n) mărginit şi (c_n) nemărginit; d) (b_n) nemărginit şi (c_n) mărginit; e) (b_n) mărginit şi (c_n) mărginit numai dacă (a_n) este mărginit; f) (c_n) nemărginit şi (b_n) mărginit numai dacă (a_n) este mărginit.

2.570C Fie $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[nx]}{n}$, $x \in (0,1)$, unde $[nx]$ este partea întreagă a lui nx. Atunci

a) $\ell = 0$; b) $\ell = x$; c) $\ell = 1-x$; d) $\ell = 1$; e) $\ell = \dfrac{x}{2}$; f) $\ell = x^2$.

2.571C Aflaţi a_n, dacă $a_1 = 1, a_2 = 4$ şi $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, n \in \mathbb{N}^*$.

a) $a_n = 2^{n-2} - 3^{n-1}$; b) $a_n = 18 \cdot 3^{n-3} - 2^{n-1}$; c) $a_n = 5 \cdot 3^{n-2} - 2^{n-1}$; d) $a_n = 10 \cdot 2^{n-2} - 3^n$; e) $a_n = 2 \cdot 5^{n-1} - 3^{n-2}$; f) $a_n = 3 \cdot 5^{n-2} - 3^n$.

2.572C Să se găsească termenul general al şirului $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7, \ldots$, care are proprietatea că diferenţele dintre termenii consecutivi formează o progresie aritmetică.

a) $a_n = \frac{n^2+n+2}{2}$; b) $a_n = \frac{n^2+n+4}{2}$; c) $a_n = \frac{n^2-n+2}{2}$; d) $a_n = \frac{n^2+n}{2}$; e) $a_n = \frac{n}{2}$; f) $a_n = \frac{n^2+2n}{2}$.

2.573C Să se determine marginea inferioară şi marginea superioară pentru mulţimea

$$\left\{\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1} \middle| x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\right\}.$$

a) 0 şi 1; b) $-\infty$ şi ∞; c) $-\frac{1}{24}$ şi ∞; d) $-\infty$ şi 1; e) -1 şi 1; f) 0 şi ∞.

2.574C Fie $a, r, q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ fixate şi fie şirurile $x_n = (a + (n-1)r)q^{n-1}$ şi $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Care afirmaţie este adevărată ?

a) x_n este o progresie geometrică; b) $y_n = a\frac{1-q^n}{1-q} + rq\frac{(n-1)q^n - nq^{n-1}+1}{(1-q)^2}$; c) $y_n = a\frac{1-q^n}{1-q} + rq(q^n-1)\frac{nq-1}{(1-q)^2}$; d) x_n este şir nemărginit $\forall a, r, q \in \mathbb{R}$; e) $y_n = a\frac{1-q^n}{1-q} + rq(q^{n-1}-1)\frac{nq^2-(n-1)q+1}{(1-q)^2}$; f) $y_n = a\frac{1-q^n}{1-q} + nr\frac{(n-1)q^{n+1}-nq^n+2}{(1-q)^2}$.

2.2 Limite

2.575A Limita şirului $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este

a) 0; b) ∞; c) 1; d) $\frac{1}{2}$; e) 2; f) e.

2.576A Dacă $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+2+3+\cdots+n)^2}{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}$, atunci

a) $\ell = 1$; b) $\ell = \frac{1}{2}$; c) $\ell = 4$; d) $\ell = \infty$; e) $\ell = \frac{1}{4}$; f) $\ell = \frac{3}{4}$.

2.577A Ştiind că $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \ln a$, $(a>0)$, să se calculeze

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{c}-\sqrt[n]{d}},\ a,b,c,d>0, c\neq d.$$

a) $\ell = \ln\frac{ad}{bc}$; b) $\ell = 0$; c) $\ell = \frac{ad}{bc}$; d) $\ell = \frac{\ln\frac{a}{b}}{\ln\frac{c}{d}}$; e) $\ell = \infty$; f) $\ell = 1$.

2.578A Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}$.

a) ∞; b) 1; c) 0; d) $\frac{1}{2}$; e) nu există; f) $\frac{1}{e}$.

2.579A Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}-\sqrt{n}$.

a) ∞; b) 1; c) 0; d) $\frac{1}{2}$; e) nu există; f) $\frac{1}{4}$.

2.580A Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arcsin\frac{1}{n^2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}\right)$.

a) ∞; b) 2; c) 0; d) π; e) nu există; f) $\frac{\pi}{4}$.

2.581A Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-7n+13}}{\sqrt[3]{-n^3+2n^2+2n}}$.

a) ∞; b) 2; c) 0; d) e; e) -1; f) $\frac{1}{4}$.

2.582A Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \log_8\left(\left(\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt[3]{n^3-2}}{n+1}\right)^{\frac{\sqrt[3]{-n^3-n+1}}{n+\sqrt[4]{n^4-1}}}\right)$

a) ∞; b) 2; c) e; d) $\frac{1}{4}$; e) 1; f) $-\frac{1}{6}$.

2.583A Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-3}}}$ şi ℓ_s, ℓ_d limitele laterale în punctul $x=3$. Avem:

a) $\ell_s = \frac{1}{2}$, $\ell_d = 1$; b) $\ell_s = 1$, $\ell_d = \frac{1}{2}$; c) $\ell_s = 0$, $\ell_d = 1$;
d) $\ell_s = 1$, $\ell_d = 0$; e) $\ell_s = 1$, $\ell_d = \infty$; f) $\ell_s = \infty$, $\ell_d = 1$.

2.584A Care dintre următoarele perechi de valori sunt limitele laterale ale funcţiei $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$, în punctul $x=1$?

a) $\ell_s = \infty$, $\ell_d = 0$; b) $\ell_s = 0$, $\ell_d = \infty$; c) $\ell_s = 1$, $\ell_d = -1$; d) $\ell_s = -1$, $\ell_d = 1$; e) $\ell_s = \infty$, $\ell_d = -\infty$; f) $\ell_s = \ell_d = 1$.

2.585A Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3^n+5^n+7^n}{2^n+4^n+6^n+8^n}$.

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4; f) $+\infty$.

2.586A Să se calculeze $\ell = \lim\limits_{n\to\infty}(n+2-\sqrt{n^2+n+3})$.

a) $\ell = 1$; b) $\ell = \infty$; c) $\ell = 0$; d) $\ell = \frac{3}{2}$; e) nu există; f) $\ell = -1$.

2.587A Să se calculeze $\ell = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n+x^{n-1}-2}{x-1}$.

a) Nu există; b) $\ell = 1$; c) $\ell = \infty$; d) $\ell = 2n-1$; e) $\ell = 2n+1$; f) $\ell = n$.

2.588A Fie $\ell = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cos^2\frac{\pi x}{3}$. Atunci

a) $\ell = \frac{1}{4}$; b) $\ell = 1$; c) $\ell = 0$; d) $\ell = \frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $\ell = \frac{3}{4}$; f) $\ell = +\infty$.

2.589A Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_n = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^n + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^n$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; d) $\sqrt{6}$; e) 1; f) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

2.590A Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ şi şirul cu termenul general $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(2\sqrt{k}\right)$, $n\in\mathbb{N}$. Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Atunci

a) $a = e^2+1$; b) $a = \frac{e^2}{1-e^2}$; c) $a = \frac{1-e^2}{e^2}$; d) $a = \frac{e^2}{e^2-1}$; e) $a = \frac{e^2-1}{e^2}$; f) $a = \frac{e^2+1}{e^2-1}$.

2.591A Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$.

a) 1; b) 0; c) 2; d) 1/2; e) ∞; f) e.

2.592A Fie a un număr real fixat şi (a_n) un şir definit prin termenul său general $a_n = a+1-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.593A Limita şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $a_0=\sqrt{3}$ şi $a_{n+1}=\sqrt{3+2a_n}, n\in\mathbb{N}$, este

a) 3; b) ∞; c) $2\sqrt{3}$; d) imposibil de calculat; e) $\sqrt{6}$; f) $2(\sqrt{3}+1)$.

2.594A Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2+x^2\cos x}$.

a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) limita nu există; d) 2; e) ∞; f) 0.

2.595A Pentru care din şirurile următoare se verifică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$?

a) $a_n=(-1)^n+\frac{1}{2}$; b) $a_n=(-1)^n+1$; c) $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$; d) $a_n=\frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{n}$;
e) $a_n=\left(\frac{1}{2}+(-1)^n\right)^n$; f) $a_n=\frac{1-n}{n}$.

2.596A Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-4x^2-3x+18}$.

a) $\frac{4}{3}$; b) $-\frac{3}{2}$; c) $\frac{5}{4}$; d) $-\frac{2}{3}$; e) $\frac{4}{5}$; f) $\frac{3}{2}$.

2.597A Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{x/2}$.

a) $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$; b) e^x; c) x; d) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$; e) e^{-2x}; f) e.

2.598A Să se determine $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\sin nx}{x^2}$.

a) n; b) n^2; c) $2n$; d) $2n+1$; e) 1; f) 0.

2.599A Care dintre următoarele limite este cea corectă ?

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+x^2}=-\infty$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cos x=\infty$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|2x-2|-x}{2x-4}=\frac{1}{2}$;
d) $\lim\limits_{x\searrow 0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}=\infty$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{x^2+5x}=3$; f) $\lim\limits_{x\searrow 0}\ln x=-1$.

2.600A Fie $\ell=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}$. Atunci

a) $\ell=1$; b) $\ell=2$; c) $\ell=0$; d) $\ell=\infty$; e) ℓ nu există ; f) $l=1/2$.

2.601A Fie $a\in\mathbb{R}$ şi $x_n=\sqrt{n^2+n+1}-an$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Care afirmaţie este adevărată ?

a) dacă $a\neq 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$; b) dacă $a=1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$ şi dacă $a>1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$; c) şirul x_n este convergent pentru orice $a\in\mathbb{R}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=1$; e) dacă $a\in[0,1]$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$; f) dacă $a\in[0,1]$, atunci x_n este convergent.

2.602A Utilizând rezultatul $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{m}$ să se calculeze

$$\ell=\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}.$$

a) $\ell=\infty$; b) $\ell=1$; c) $\ell=0$; d) $\ell=\dfrac{1}{n!}$; e) $\ell=n!$; f) $\ell=\sqrt{n!}$

2.603B Fie $\ell=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\dfrac{1+x}{x}\right)$. Atunci

a) $\ell=\frac{1}{2}$; b) $\ell=-\infty$; c) $\ell=\infty$; d) $\ell=0$; e) $\ell=\frac{1}{3}$; f) $\ell=2$.

2.604B Calculaţi $\ell=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\mathrm{e}^x-3\pi^x}{\mathrm{e}^x+2\pi^x}$.

a) $\ell=0$; b) $\ell=-\frac{3}{2}$; c) $\ell=\infty$; d) $\ell=-\infty$; e) $\ell=-\frac{1}{3}$; f) $\ell=2$.

2.605B Fie $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax+x^2)}{\sqrt{x+b}-1}=2$. Dacă $\lambda=a+b$, atunci

a) $\lambda=0$; b) $\lambda=3$; c) $\lambda=4$; d) $\lambda=-1$; e) $\lambda=\frac{1}{2}$; f) $\lambda=2$.

2.606B Calculaţi $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}-\mathrm{e}^{\operatorname{tg} x}}{\mathrm{e}^{\sin 2x}-\mathrm{e}^{\operatorname{tg} 2x}}$.

a) $\ell=0$; b) $\ell=\frac{1}{2}$; c) $\ell=\infty$; d) $\ell=\frac{1}{4}$; e) $\ell=\frac{1}{8}$; f) limita nu există.

2.607B Fie $\alpha,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha(\sqrt[3]{n^3+bn+1}-n)=1$. Dacă $S=\alpha+b$, avem

a) $S=1$; b) $S=2$; c) $S=3$; d) $S=\frac{4}{3}$; e) $S=\frac{5}{3}$; f) $S=4$.

2.608B Care este condiţia necesară şi suficientă ca, pentru $a,b\in(-1,1)\setminus\{0\}$, să avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-a+a^2-a^3+\dots+(-1)^n a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}>1\ ?$$

a) $a+b<0$; b) $a+b>0$; c) $a>b$; d) $a<b$; e) $a-b>1$; f) $a+b<1$.

2.609B Dacă $\ell=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-\ln(\mathrm{e}-x)}}$, atunci

a) $\ell=\mathrm{e}$; b) $\ell=0$; c) $\ell=\sqrt{\mathrm{e}}$; d) $\ell=\infty$; e) $\ell=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$; f) limita nu există.

2.610B Dacă $\ell=\lim\limits_{x\searrow 0}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$, atunci

a) $\ell=\mathrm{e}$; b) $\ell=4$; c) $\ell=1$; d) $\ell=\infty$; e) $\ell=\mathrm{e}^2$; f) limita nu există.

2.611B Calculaţi $\ell = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

a) $\ell = e$; b) $\ell = \infty$; c) $\ell = 1$; d) $\ell = 0$; e) $\ell = \sqrt{e}$; f) limita nu există.

2.612B Calculaţi $\ell = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x\sin^3 x + 1}{x^2\cos^2 x + 1}$.

a) $\ell = 0$; b) $\ell = \infty$; c) $\ell = 1$; d) $\ell = 2$; e) $\ell = \frac{1}{2}$; f) limita nu există.

2.613B Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\frac{m}{n}$; b) mn; c) $(-1)^{m-n}$; d) $(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$; e) 1; f) nu există.

2.614B Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+2)\arcsin\dfrac{1}{2x^2+1}$.

a) 0; b) 1; c) ∞; d) $\frac{1}{2}$; e) 2; f) nu există.

2.615B Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin x + \cos x)e^{-x^2}$.

a) ∞; b) $-\infty$; c) 0; d) e; e) 1; f) nu există.

2.616B Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})$, $|a|<1$.

a) ∞; b) $\frac{1+a}{1-a}$; c) $\frac{1}{1-a}$; d) e; e) 1; f) $1-a$.

2.617B Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^3}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$.

a) ∞; b) $-\infty$; c) -1; d) $-\frac{1}{4}$; e) 1; f) nu există.

2.618B Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}} - n\sqrt{2}\right)$.

a) $\frac{\sqrt{2}}{8}$; b) ∞; c) 1; d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; e) $\frac{\sqrt{3}}{8}$; f) nu există.

2.619B Să se calculeze limita şirului

$$a_n = \frac{\alpha^n}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^n)},\ n \in \mathbb{N}^*,\ (\alpha > 0).$$

a) ∞; b) 0; c) e; d) $\frac{1}{2}$; e) 1; f) nu există.

2.620B Să se calculeze $\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{\sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x} + \sqrt[5]{a} + \sqrt[7]{a}}{x+a}$.

a) $\frac{\sqrt[5]{a^4}}{5} + \frac{\sqrt[7]{a^6}}{7}$; b) $5\sqrt[5]{a^4} + 7\sqrt[7]{a^6}$; c) $-\infty$; d) 0; e) ∞; f) $\frac{1}{5\sqrt[5]{a^4}} + \frac{1}{7\sqrt[7]{a^6}}$.

2.621B Să se calculeze $\ell = \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - \sqrt[5]{x+25}}$

a) $\ell = \frac{20-2}{25-9} = \frac{9}{8}$; b) $\ell = \frac{2+20}{9+25} = \frac{11}{17}$; c) $\ell = \dfrac{\frac{1}{6} - \frac{1}{27}}{\frac{1}{32} - \frac{1}{80}}$; d) $\ell = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}$;
e) $\ell = \infty$; f) rezultatele precedente sunt toate false.

2.622B Să se calculeze $\ell = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[3]{2x+1}}{x}$.

a) $\ell = 1$; b) $\ell = 2$; c) $\ell = \frac{7}{12}$; d) $\ell = -\frac{5}{12}$; e) $\ell = 9$; f) $\ell = +\infty$.

2.623B Să se calculeze $\ell = \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - \sqrt[3]{n^3+1})$.

a) $\ell = 0$; b) $\ell = \frac{1}{2}$; c) $\ell = \infty$; d) $\ell = 1$; e) nu există; f) $\ell = -1$.

2.624B Să se studieze $\lim\limits_{x\to\infty}\sin 2x$.

a) ∞; b) nu există; c) 1; d) -1; e) $\sin 2$; f) 0.

2.625B Fie $\ell = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x + \sin x}{x + \cos x}$. Atunci

a) $\ell = 0$; b) $\ell = +\infty$; c) $\ell = 1$; d) $\ell = \pi$; e) $\ell = \dfrac{\pi}{2}$; f) nu există limita.

2.626B Şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere naturale sunt definite de relaţia $(2+\sqrt{5})^n = x_n + y_n\sqrt{5}, n \in \mathbb{N}$. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$.

a) 1; b) $\sqrt{5}$; c) ∞; d) $2+\sqrt{5}$; e) $1/\sqrt{5}$; f) 2.

2.627B Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2^{n-1}}}\right)$.

a) 1; b) 2; c) 0; d) $\dfrac{1}{2}$; e) $\dfrac{1}{4}$; f) 4.

2.628B Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n^{1/n}-1)}{\ln n}$.

a) 1; b) e; c) 1/e; d) $e-1$; e) 2; f) 1/2.

2.629B Şirul (a_n) este definit prin $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n^2}, \forall n \geq 1$. Să se calculeze termenul general a_n în funcţie de $n \geq 1$.

a) $n+1$; b) $n-1$; c) $\sqrt{n+1}$; d) $\sqrt{n-1}$; e) $\sqrt{n}$; f) n.

2.630B Se dă $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$. Să se calculeze limita şirului cu termenul general $u_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

a) ∞; b) 0; c) 1; d) 2; e) $\frac{1}{2}$; f) $-\infty$.

2.631B Fie şirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definit de relaţia $x_{n+1} = \frac{1}{3}(b + x_n + x_{n-1}^2)$, $\forall n \geq 2$, $x_1 = x_2 = 0$, $b \in [0,1]$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

a) ∞; b) $1+\sqrt{1-b}$; c) $1-\sqrt{1-b}$; d) $\sqrt{1-b}$; e) 1; f) $-\sqrt{1-b}$.

2.632B Se consideră şirul $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\left(1-\dfrac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\dfrac{n}{n+1}\right)$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

a) 0; b) ∞; c) 1; d) şirul este divergent; e) e; f) $\frac{1}{e}$.

2.633B Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(2-\sqrt{\operatorname{tg} x}\right)^{\frac{1}{\sin x-\cos x}}$.

a) $e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$; b) $\sqrt{e}$; c) ∞; d) 0; e) e; f) e^2.

2.634B Ce relaţie există între numerele reale a, b, c dacă

$$\lim_{n\to\infty}[a\ln(n+1)+b\ln(n+2)+c\ln(n+3)]=0?$$

a) $a+b=0$; b) $a=b=-1$; c) $a+b+c=0$; d) $a+b<0$; e) $a+b=c$; f) $2b=a+c$.

2.635B Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin x}\sin\dfrac{1}{x}$.

a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{3}$; d) 2; e) 0; f) limita nu există.

2.636B Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^4}$.

a) $-\dfrac{1}{2}$; b) 0; c) $\dfrac{1}{2}$; d) 1; e) -1; f) 2.

2.637B Fie şirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dat prin relaţia de recurenţă $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$, $n\in\mathbb{N}$, $x_0=b$, unde $a,b\in\mathbb{R}^*, a>0$. Atunci

a) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent; b) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător; c) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este strict descrescător; d) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi are limita $\ell=0$; e) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi are limita $\ell\in\{\pm\sqrt{a}\}$; f) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi are limita $\ell=-\sqrt{a}$.

2.638B Cunoscând că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$, să se calculeze $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}$.

a) $\ell=1$; b) $\ell=0$; c) $\ell=\infty$; d) $\ell=\dfrac{1}{2}$; e) $\ell=e$; f) $\ell=\dfrac{1}{e}$.

2.639B Fie şirul $x_n=\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$, $a,b,c>0$ şi $\ell=\lim x_n$. Atunci

a) $\ell=1$; b) $\ell=0$; c) $\ell=\infty$; d) $\ell=e$; e) $\ell=\sqrt[3]{abc}$; f) $\ell=\dfrac{1}{e}$.

2.640B Şirul $\{x_n\}\subset\mathbb{N}^*$ definit prin $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_3}+\ldots+\dfrac{x_{n-1}}{x_n}+\dfrac{x_n}{x_1}=n, \forall n\in\mathbb{N}^*$, este

a) strict crescător; b) strict descrescător; c) oscilant; d) constant; e) divergent; f) nemărginit.

2.641B Restrângeţi expresia $t=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$.

a) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; b) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$; c) $\sqrt{5}$; d) $\sqrt{3}$; e) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; f) 1.

2.642C Limita x a şirului $x_n=\dfrac{1^2}{n^3+1^2}+\dfrac{2^2}{n^3+2^2}+\ldots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2}$ este

a) $x=2$; b) $x=\frac{1}{2}$; c) $x=\frac{1}{3}$; d) $x=0$; e) $x=e$; f) $x=\infty$.

2.643C Să se determine $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^k+2^k+\cdots+n^k}$ să fie finită.

a) nu există; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4; f) $k\in\mathbb{N}$.

2.644C Fie $x_n=(\sqrt{2}+1)^n$. Pentru orice $n\geq 1$ există numere naturale a_n, b_n astfel încât $x_n=a_n+b_n\sqrt{2}$. Să se calculeze $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$.

a) $\ell=0$; b) nu există; c) $\ell=\sqrt{2}$; d) $\ell=\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\ell=\infty$; f) $\ell=-\sqrt{2}$.

2.645C Să se studieze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-3x(\cos x+3\sin x)}}{e^{-2x(\cos x+\sin x)}}$.

a) nu există; b) 0; c) ∞; d) $-\infty$; e) 1; f) -1.

2.646C Fie $\ell=\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$. Atunci

a) $\ell=1$; b) $\ell=0$; c) $\ell=+\infty$; d) $\ell=\frac{1}{e}$; e) $\ell=e$; f) $\ell=e^2$.

2.647C La un calculator electronic de buzunar prevăzut cu tastele funcţionale $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$, $\sqrt{x}$ şi $\operatorname{arctg} x$, un elev face următorul experiment: introduce în calculator un număr $x_0>0$ şi apoi apasă o aceeaşi tastă funcţională de un număr de ori (suficient de mare) până constată că i se afişează valoarea 1. Pe ce tastă funcţională a apăsat elevul?

a) $\sin x$; b) $\cos x$; c) e^x; d) $\ln x$; e) $\sqrt{x}$; f) $\operatorname{arctg} x$.

2.648C Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}x(\pi-2\operatorname{arctg} x)$.

a) 1; b) 3; c) π; d) 2; e) $\frac{1}{\pi}$; f) $-\pi$.

2.649C Fie şirul $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2+k}{n^3+k^2}$. Să se afle $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

a) 1/2; b) 2; c) 3; d) 1/3; e) 1; f) 1/6.

2.650C Să se determine $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin|\ln x|}{x-1}$.

a) 1; b) -1; c) 0; d) ∞; e) nu există; f) e.

2.651C Să se calculeze $\ell = \lim_{n\to\infty} (n^2+n+2)^{\frac{1}{n^2+n+1}}$.

a) 1; b) 0; c) $\sqrt{e}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 2; f) $\sqrt[3]{e}$.

2.652C Să se determine limita şirului $\{x_n\}$ definit prin $0 < x_n < 1$, $\log_4(x_n+2) - \log_2 x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) 0; b) 1; c) ∞; d) 2; e) $\frac{1}{2}$; f) $\sqrt{2}$.

2.653C Dacă $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface condiţia $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n} = 0$, atunci

a) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este şir crescător; b) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este şir descrescător;
c) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = 0$; d) $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$; e) $\lim_{n\to\infty} (x_1^2+\cdots+x_n^2) = 0$;
f) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este nemărginit.

2.654C Calculaţi $\lim_{n\to\infty} n^k \left(\sqrt{\frac{n-1}{n}} - \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)$, pentru $a \in (0,1)$ şi $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$.

a) $-\ln a$ pentru $k=3$ şi ∞ pt. $k>3$; b) limita nu există; c) $\ln\frac{1}{a}$; d) ∞; e) 0; f) 1.

2.655C Să se determine numărul real c pentru care funcţia $f:(0,2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2cx\ln(ex) + c^2}, & x \in (0,1) \\ c + 3x, & x \in [1,2] \end{cases}$$

are limită în $x = 1$.

a) 3; b) -1; c) 1 şi 2; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{2}$; f) radicalul nu este definit pe (0,1).

2.656C Fie funcţia polinomială $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x$. Dacă g este câtul împărţirii lui f la x^2+1, să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{g(1)+g(2)+\ldots+g(n)}{n^3}$.

a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{8}$; d) $\frac{2}{3}$; e) $\frac{4}{3}$; f) $\frac{1}{4}$.

2.657C Să se determine $k \in \mathbb{N}^*$ dacă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{kn^3 + 1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots + (1+2+\ldots n)}{n^3+n^2+1} = \frac{7}{6}.$$

a) 5; b) 3; c) 1; d) 2; e) nu există; f) 4.

2.658C Calculaţi $\lim_{x\to\infty} f(x)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1+x^2}$.

a) 2; b) $\frac{2}{3}$; c) 0; d) 1; e) $\frac{1}{4}$; f) f nu are limită pentru $x \to \infty$.

2.659C Fie $\ell = \lim_{x\nearrow 1}(1-x)^2 f(x) - \lim_{x\searrow 1} f(x)$, unde $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}, & x \leq 1 \\ e^{n(1-x)}, & x > 1 \end{cases}$. Atunci ℓ este

a) 0; b) -1; c) 1; d) ∞; e) nu există; f) $-\infty$.

2.660C Se dau funcţiile $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, $g(x) = e^{-x}\sin x$, $h(x) = e^x(2+\sin x)$. Care afirmaţie este adevărată ?

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$;
b) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x)$ nu există, $\lim_{x\to infty} h(x)$ nu există;
c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ nu există, $\lim_{x\to-\infty} h(x)$ nu există;
d) $\lim_{x\to-1} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} h(x)$ nu există;
e) $\lim_{x\to-1} f(x)$ nu există, $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ nu există, $\lim_{x\to\infty} h(x)$ nu există;
f) $\lim_{x\to 1} f(x)$ nu există, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$.

2.661C Valoarea limitei $\ell = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+a_1+a_2+\ldots+a_n)^{nx+a_1+a_2+\ldots+a_n}}{(x+a_1)^{x+a_1}\cdot(x+a_2)^{x+a_2}\ldots(x+a_n)^{x+a_n}}$ este

a) $\ell = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$; b) $\ell = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$; c) $\ell = a_1a_2\ldots a_n$; d) $\ell = \frac{1}{a_1a_2\ldots a_n}$;
e) $\ell = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots\frac{1}{a_n}}$; f) $\ell = e^{(n-1)(a_1+a_2+\ldots+a_n)}$.

2.3 Funcţii continue

2.662A Determinaţi mulţimea de definiţie a funcţiei $f(x) = \sqrt{\sin x - \cos x}$.

a) $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} (k\pi+\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{3\pi}{4})$; b) $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} [2k\pi+\frac{\pi}{4}, 2k\pi+\frac{5\pi}{4}]$; c) $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} [2k\pi+\frac{\pi}{3}, 2k\pi+\frac{2\pi}{3}]$;
d) $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} [2k\pi-\frac{\pi}{4}, 2k\pi+\frac{\pi}{4}]$; e) $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} [2k\pi, 2k\pi+\pi]$; f) $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} [2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\pi]$.

2.663A Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$ este continuă dacă

a) $a = n$; b) $a = \frac{1}{n}$; c) $a = 1$; d) $a = -1$; e) $a = e$; f) $a = \frac{1}{e}$.

2.664A Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & x > 0 \\ ax+b, & x \leq 0 \end{cases}$ este continuă dacă

a) $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$; b) $a = 1$, $b = 2$; c) $a = 1$, $b > 1$;
d) $a = -1$, $b = 2$; e) $a = b = -1$; f) $a = 1$, $b \in \mathbb{R}$.

2.665A Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x^2+1, & x<2\\ a, & x=2\\ 5x-1, & x>2\end{cases}$ este continuă dacă

a) $a=1$; b) $a\in\mathbb{R}$; c) $a>1$; d) $a=9$; e) $a=5$; f) $a=4$.

2.666A Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ a, & x=2\end{cases}$ este continuă dacă

a) $a=1$; b) $a\in\mathbb{R}$; c) $a>1$; d) $a=9$; e) $a=5$; f) $a=4$.

2.667A Funcţia $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}\\ a, & x=0\end{cases}$$

este continuă pentru

a) $a=1$; b) $a\in\mathbb{R}$; c) $a=\sqrt{2}$; d) $a=-\sqrt{2}$; e) $a=\sqrt{3}$; f) $a=-\sqrt{3}$.

2.668A Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$$f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{6\sin a(x-1)}{x-1}, & x\in[0,1)\\ 5x+a, & x\in[1,2]\end{cases}$$

să fie continuă.

a) 1; b) 5; c) 10; d) 2; e) 0; f) nu există.

2.669A Să se determine $m\in\mathbb{R}$ dacă funcţia $f(x)=\begin{cases}2x+m, & x\leq 1\\ m^2x+2, & x>1\end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

a) $m=0$; b) $m=1$; c) $m=2$; d) $m\in\{0,1\}$; e) nu există; f) $m=-1$.

2.670A Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leq 1\\ 3-ax^2, & x>1\end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$, este continuă. Atunci

a) $a=\dfrac{1}{2}$; b) $a=2$; c) $a=0$; d) $a=\sqrt{2}$; e) $a=1$; f) $a=-1$.

2.671A Aflaţi $a,b\in\mathbb{R}$ astfel ca funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}ax+3, & x<b\\ 4a, & x=b\\ 3x+a, & x>b\end{cases}$ să fie continuă pe domeniul de definiţie.

a) $a=1,b=0$; b) $a=2,b=3$; c) $a=3,b=1$; d) $a=2,b=2$; e) $a=2,b=1$; f) $a=1,b=1$ sau $a=3,b=3$.

2.672A Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^3 2^{nx}}{1+2^{nx}}$, iar A mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei f. Atunci

a) $A=\varnothing$; b) $A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; c) $A=\mathbb{R}$; d) $A=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$; e) A este finită; f) A nu conţine 0.

2.673A Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită de

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{x^2-3x+2}, & x\in(-\infty,0]\\ x\ln x, & x\in(0,1]\\ e^{-x}-b, & x\in(1,\infty)\end{cases}$$

să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

a) $a=0$, $b=\frac{1}{e}$; b) $\forall a\in\mathbb{R}$, $b=\frac{1}{e}$; c) $a=0$, $b=0$; d) problema nu are soluţie; e) $\forall a,b\in\mathbb{R}$; f) $a=1,b=e$.

2.674A Să se determine mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=[x]\sin\pi x$. ($[a]$ este partea întreagă a numărului real a).

a) $\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{Z}^*$; c) $\mathbb{Q}$; d) $\varnothing$; e) $\mathbb{Q}^*$; f) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

2.675A Fie a un număr real fixat şi funcţia

$$f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}a\sin x+\cos x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right],\\ \operatorname{tg}x+a\operatorname{ctg}x, & x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

Pentru ce valoare a parametrului a funcţia f este continuă în punctul $\dfrac{\pi}{4}$?

a) $a=-1$; b) $a=2$; c) $a=\sqrt{2}-1$; d) $a=-2$; e) $a=1$; f) $a=\sqrt{2}+1$.

2.676A Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}Ae^{2x}, & x\leq 0\\ \sin 2x+B\cos 3x, & x>0.\end{cases}$

Să se determine constantele reale A şi B astfel încât f să fie continuă.

a) $A=B$; b) $A+B=0$; c) $2A=B$; d) $A=2B$; e) $A<B$; f) $A>B$.

2.677A Funcţia $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{2}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ este continuă în $x=0$ doar dacă

a) $a=1$; b) $a=2$; c) funcţia f nu poate fi continuă în $x=0$; d) $a=\infty$; e) $a=0$; f) $a=1/2$.

2.678A Fie $a \in \mathbb{R}$ şi fie $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} - a^2 \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x \in (-1, 0) \\ \ln(1+x), & x \in [0, \infty). \end{cases}$

Fie S suma valorilor lui a pentru care f este funcţie continuă.
Care afirmaţie este adevărată ?
a) $S = \sqrt{2}$; b) $S = 1$; c) $S = 0$; d) $S = 1 + \sqrt{2}$; e) $S = -1$; f) $S = -\sqrt{2}$.

2.679A Se ştie că un punct de discontinuitate este de prima speţă dacă limitele laterale există şi sunt finite sau de speţa a doua în caz contrar. Fie funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}, & x \neq 0,\ x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dacă $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, atunci
a) x_1 este punct de continuitate, x_2 este punct de discontinuitate; b) x_1 şi x_2 sunt puncte de continuitate; c) ambele sunt puncte de discontinuitate de prima speţă; d) ambele sunt puncte de discontinuităţi de speţa a doua; e) x_1 este punct de discontinuitate de speţa a doua, x_2 este punct discontinuitate de prima speţă; f) x_1 este punct de discontinuitate de prima speţă, x_2 este punct de discontinuitate de speţa a doua.

2.680B Fie ecuaţia $(x+1)2^{x+1} = 1$. Care afirmaţie este adevărată ?
a) ecuaţia nu are soluţii reale în intervalul $(-\infty, 0]$; b) ecuaţia nu are soluţii reale; c) ecuaţia are cel puţin o soluţie reală în intervalul $[0, 2]$; d) ecuaţia are cel puţin o soluţie reală în intervalul $[-1, 0]$; e) ecuaţia are exact două soluţii reale în intervalul $[-\frac{1}{2}, 1]$; f) ecuaţia are cel puţin o soluţie reală în $[0, \infty)$.

2.681B Aflaţi punctele de discontinuitate ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{x^{2n+2}}{x^{2n} + 2^{2n}}}.$$

a) ± 1; b) 0; c) $\pm\sqrt{2}$; d) nu există; e) ± 2; f) afirmaţiile precedente sunt false.

2.682B Punctele de discontinuitate ale funcţiei $f : [0, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - [x^2]$, sunt
a) 1,2,3; b) 1, $\sqrt{2}$; c) 1, $\sqrt{2}$; d) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$; e) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$; f) nu există.

2.683B Punctele de discontinuitate ale funcţiei $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$, sunt
a) $1, 2, 3, \ldots, 9$; b) 1, 9; c) 1, 2, 5; d) 0,1,2,9; e) 1,4,9; f) nu există.

2.684B Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{nx}}{1 + e^{nx}}$. Atunci
a) f este continuă; b) $x = 0$ este punct de discontinuitate de speţa a doua; c) ± 1 sunt puncte de discontinuitate de speţa întâi; d) f este continuă în trei puncte; e) f este continuă în $x = 0$; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

2.685B Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$. Atunci
a) f este continuă; b) $x = 0$ este punct de discontinuitate de speţa a doua; c) ± 1 sunt puncte de discontinuitate de speţa întâi; d) f este discontinuă în trei puncte; e) f este discontinuă în $x = 0$; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

2.686B Care din următoarele două funcţii $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $g(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ pot fi prelungite prin continuitate în $x = 0$?
a) ambele; b) nici una; c) g da, f nu; d) f da, g nu; e) nu se pune problema deoarece sunt deja continue în 0; f) nu se pune problema deoarece nu sunt definite în 0.

2.687B Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$$f\colon [1,3] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2ax + a^2}, & x \in [1, 2) \\ ax + 3, & x \in [2, 3) \end{cases}$$

să fie continuă.
a) $a = 0, a = 1$; b) $a = -\frac{1}{3}$; c) $a = 10$; d) $a = -\frac{1}{7}$; e) $a = -5, a = -\frac{1}{3}$; f) $a = \frac{2}{3}$.

2.688B Pentru ce $m \in \mathbb{R}$ funcţia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^m \cos \frac{2}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$?
a) $m = 1$; b) $m \geq 1$; c) $m > 0$; d) $m = 0$; e) nu există; f) $m = 2$.

2.689B Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin^{2n} x$ şi fie k numărul de puncte de discontinuitate ale funcţiei în intervalul $[-\pi, \pi]$. Atunci
a) $k = 0$; b) $k = 1$; c) $k = 2$; d) $k = 4$; e) $k = 5$; f) $k = 3$.

2.690B Funcţia $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{-x}} \operatorname{arctg} \sqrt{-x}, & x \in (-1, 0) \\ k, & x = 0 \\ \dfrac{a}{\sqrt{x}} \ln \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}, & x \in (0, 1) \end{cases}$

unde $a, k \in \mathbb{R}$, este continuă în origine pentru

2.678A Fie $a \in \mathbb{R}$ şi fie $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} - a^2\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x \in (-1,0) \\ \ln(1+x), & x \in [0,\infty). \end{cases}$

Fie S suma valorilor lui a pentru care f este funcţie continuă.
Care afirmaţie este adevărată ?

a) $S = \sqrt{2}$; b) $S = 1$; c) $S = 0$; d) $S = 1 + \sqrt{2}$; e) $S = -1$; f) $S = -\sqrt{2}$.

2.679A Se ştie că un punct de discontinuitate este de prima speţă dacă limitele laterale există şi sunt finite sau de speţa a doua în caz contrar. Fie funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}, & x \neq 0,\ x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dacă $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, atunci

a) x_1 este punct de continuitate, x_2 este punct de discontinuitate; b) x_1 şi x_2 sunt puncte de continuitate; c) ambele sunt puncte de discontinuitate de prima speţă; d) ambele sunt puncte de discontinuităţi de speţa a doua; e) x_1 este punct de discontinuitate de speţa a doua, x_2 este punct discontinuitate de prima speţă; f) x_1 este punct de discontinuitate de prima speţă, x_2 este punct de discontinuitate de speţa a doua.

2.680B Fie ecuaţia $(x+1)2^{x+1} = 1$. Care afirmaţie este adevărată ?

a) ecuaţia nu are soluţii reale în intervalul $(-\infty, 0]$; b) ecuaţia nu are soluţii reale; c) ecuaţia are cel puţin o soluţie reală în intervalul $[0,2]$; d) ecuaţia are cel puţin o soluţie reală în intervalul $[-1,0]$; e) ecuaţia are exact două soluţii reale în intervalul $[-\frac{1}{2}, 1]$; f) ecuaţia are cel puţin o soluţie reală în $[0,\infty)$.

2.681B Aflaţi punctele de discontinuitate ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{x^{2n+2}}{x^{2n} + 2^{2n}}}.$$

a) ± 1; b) 0; c) $\pm\sqrt{2}$; d) nu există; e) ± 2; f) afirmaţiile precedente sunt false.

2.682B Punctele de discontinuitate ale funcţiei $f : [0,2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - [x^2]$, sunt

a) 1,2,3; b) 1, $\sqrt{2}$; c) 1, $\sqrt{2}$; d) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$; e) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$; f) nu există.

2.683B Punctele de discontinuitate ale funcţiei $f : [0,10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$, sunt

a) $1, 2, 3, \ldots, 9$; b) 1, 9; c) 1, 2, 5; d) 0,1,2,9; e) 1,4,9; f) nu există.

X **2.684B** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{nx}}{1 + e^{nx}}$. Atunci

a) f este continuă; b) $x = 0$ este punct de discontinuitate de speţa a doua; c) ± 1 sunt puncte de discontinuitate de speţa întâi; d) f este continuă în trei puncte; e) f este continuă în $x = 0$; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

X **2.685B** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$. Atunci

a) f este continuă; b) $x = 0$ este punct de discontinuitate de speţa a doua; c) ± 1 sunt puncte de discontinuitate de speţa întâi; d) f este discontinuă în trei puncte; e) f este discontinuă în $x = 0$; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

2.686B Care din următoarele două funcţii $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $g(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ pot fi prelungite prin continuitate în $x = 0$?

a) ambele; b) nici una; c) g da, f nu; d) f da, g nu; e) nu se pune problema deoarece sunt deja continue în 0; f) nu se pune problema deoarece nu sunt definite în 0.

2.687B Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$$f\colon [1,3] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2ax + a^2}, & x \in [1,2) \\ ax + 3, & x \in [2,3) \end{cases}$$

să fie continuă.

a) $a = 0, a = 1$; b) $a = -\frac{1}{3}$; c) $a = 10$; d) $a = -\frac{1}{7}$; e) $a = -5, a = -\frac{1}{3}$; f) $a = \frac{2}{3}$.

2.688B Pentru ce $m \in \mathbb{R}$ funcţia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^m \cos\frac{2}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

este continuă pe $\mathbb{R}$?

a) $m = 1$; b) $m \geq 1$; c) $m > 0$; d) $m = 0$; e) nu există; f) $m = 2$.

2.689B Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin^{2n} x$ şi fie k numărul de puncte de discontinuitate ale funcţiei în intervalul $[-\pi, \pi]$. Atunci

a) $k = 0$; b) $k = 1$; c) $k = 2$; d) $k = 4$; e) $k = 5$; f) $k = 3$.

2.690B Funcţia $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{-x}} \operatorname{arctg}\sqrt{-x}, & x \in (-1,0) \\ k, & x = 0 \\ \dfrac{a}{\sqrt{x}} \ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, & x \in (0,1) \end{cases}$

unde $a, k \in \mathbb{R}$, este continuă în origine pentru

a) $a=\frac{1}{2}, k=1$; b) $a=k=1$; c) $a=2, k=1$; d) $a=\frac{1}{2}, k=2$; e) $a=1, k=2$; f) $a=k=2$.

2.691B Aflaţi mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x^2, & x\in\mathbb{Q} \\ 3(x+1), & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

a) $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$; b) $\{\sqrt{3}\}$; c) $\{-\sqrt{3}\}$; d) $\{-1,\sqrt{3}\}$; e) $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3},\sqrt{3},-1\}$; f) $\mathbb{R}\setminus\{\sqrt{3},-1\}$.

2.692B Să se determine m şi n astfel încât funcţia $f(x)=\arcsin\dfrac{x^2+mx+n}{x^2+1}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

a) $m\in[-1,1], n=0$; b) $\forall m,n\in\mathbb{R}$; c) problema nu are soluţie; d) $m=0, n\in(-1,1)$; e) $m\in(-1,1), n=0$; f) $m=0, n\in[-1,1]$.

2.693B Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x+\cos x$. Fie ℓ suma lungimilor intervalelor componente ale mulţimii $A=\{x\in[0,2\pi]\mid f(x)\geq 0\}$. Atunci

a) $\ell=\frac{\pi}{4}$; b) $\ell=\frac{\pi}{2}$; c) $\ell=\frac{3\pi}{4}$; d) $\ell=\pi$; e) $\ell=\frac{5\pi}{4}$; f) $A=\{0,2\pi\}$.

2.694B Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$. Care dintre următoarele afirmaţii este cea adevărată ?

a) f este monoton crescătoare; b) f are un singur punct de discontinuitate; c) f are proprietatea lui Darboux; d) f are limită în punctul $x=1$; e) graficul lui f admite o asimptotă verticală; f) f este nemărginită.

2.695B Funcţia continuă $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ care verifică condiţia $f(x^2)=f(x)$, $\forall x\geq 0$, este

a) o constantă; b) e^x; c) $\ln x$; d) $\alpha x+\beta$; e) $\sin x$; f) $\cos x$.

2.696B Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}+b, & x<0\\ a, & x=0\\ x^x, & x>0\end{cases}$ este continuă în $x=0$ dacă şi numai dacă

a) $a=0, b=1$; b) $a=0, b=-1$; c) $a=b=0$; d) $a=1, b=-1$; e) $a=1, b=0$; f) $a=-1, b=-1$.

2.697C Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\in\mathbb{Q}\\ x+3, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$. Atunci

a) f este continuă; b) $x=-1$ este punct de discontinuitate de speţa întâi; c) ± 1 sunt puncte de discontinuitate de speţa a doua; d) f este continuă

în două puncte; e) f este continuă într-un singur punct; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

2.698C Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x^2+2, & x\in\mathbb{Q}\\ x^3, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$. Atunci

a) f este continuă; b) $x=1$ este punct de discontinuitate de speţa întâi; c) ± 1 sunt puncte de discontinuitate de speţa a doua; d) f este continuă în două puncte; e) f este continuă într-un singur punct; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

2.699C Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]+3$. Atunci

a) f este continuă; b) $x=1$ este punct de discontinuitate de speţa a doua; c) f nu are proprietatea lui Darboux; d) f are proprietatea lui Darboux; e) f este discontinuă într-un singur punct; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

2.700C Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x^3, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$. Atunci

a) f este continuă; b) $x=1$ este punct de discontinuitate de speţa întâi; c) f nu are proprietatea lui Darboux; d) f are proprietatea lui Darboux; e) f este discontinuă într-un număr finit de puncte; f) f este discontinuă în $x=0$.

2.701C Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. Atunci

a) f este continuă; b) $x=0$ este punct de discontinuitate de speţa întâi; c) f nu are proprietatea lui Darboux; d) f are proprietatea lui Darboux; e) f este discontinuă într-un număr infinit de puncte; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

2.702C Fie $f:[0,1]\to[0,1]$ o funcţie continuă. Atunci

a) $f(1)=1$; b) $f(1)=0$; c) există $x\in[0,1]$ astfel încât $f(x)=1$; d) există $x\in[0,1]$ astfel încât $f(x)=x$; e) $f(0)=0$; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

2.703C Să se precizeze mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\in\mathbb{Q}\\ x+3, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

a) $\mathbb{R}$; b) $\{-1,2\}$; c) $\{-1,0\}$; d) $\{0,2\}$; e) $\varnothing$; f) $\mathbb{Q}$.

2.704C Determinaţi funcţiile continue $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x)=f(2x+1), \forall x\in\mathbb{R}$.

a) f este funcţia nulă; b) $f(x) = x$; c) nu există; d) f este constantă; e) f este o funcţie de gradul al doilea; f) f este o funcţie de gradul întâi.

2.705C Fie $0 < a < 1$ şi $b > 0$. Atunci ecuaţia $x = a \sin x + b$:

a) nu are soluţii pozitive; b) nu are soluţii reale; c) are cel puţin o soluţie în $(0, a+b]$; d) are soluţia $2a + 2b$; e) are soluţia $b+1$; f) are cel puţin o soluţie în $(a+b, 2a+2b)$.

2.706C Să se afle tipul funcţiei elementare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuă pe $\mathbb{R}$, pentru care $f(0) = 1/2$, $f(x) - f(x/2) = x$.

a) exponenţială; b) polinom de gradul întâi; c) polinom de gradul doi; d) logaritmică; e) funcţie constantă; f) $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$.

2.707C Să se determine numărul de soluţii ale ecuaţiei $x^3 + 4x - 6 = 0$ situate în intervalul $[1, 2]$.

a) 0; b) 2; c) 3; d) 1; e) o infinitate; f) cel puţin două.

2.708C Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dintre variantele a),..,f) alegeţi pe aceea pentru care propoziţia "f şi g sunt discontinue în origine şi totuşi $f \circ g$ este continuă în origine" este adevărată.

a) $f(x) = |x|, g(x) = \operatorname{sgn} x$; b) $f(x) = x^2, g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \pi, & x = 0 \end{cases}$; d) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = |x|$; e) $f(x) = [x], g(x) = \sin x$; f) $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$.

2.709C Fie $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \cap (0,1) \\ 1 - x, & \text{dacă } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0,1). \end{cases}$

Care afirmaţie este adevărată ?

a) f nu este continuă şi are proprietatea lui Darboux; b) f este continuă; c) f este derivabilă; d) f nu este continuă şi nu are proprietatea lui Darboux; e) f este continuă şi are proprietatea lui Darboux; f) nici una dintre afirmaţiile anterioare nu este adevărată.

2.710C Se dau funcţiile $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0,2)$, $g : (0,2) \to \mathbb{R}$ şi $h : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}x, & \text{dacă } x \in (0,1] \\ \dfrac{x+1}{3}, & \text{dacă } x \in (1,2) \end{cases}, \quad h(x) = \cos x \text{ şi } h = g \circ f.$$

Dacă $A = \left\{x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \mid f \text{ este discontinuă în } x\right\}$, atunci

a) $A = \varnothing$; b) $A = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right\}$; c) $A = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\}$; d) $A = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$; e) $A = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right\}$; f) $A = \left\{\arccos \frac{2}{3}\right\}$.

2.711C Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 - 2 & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Determinaţi mulţimea punctelor în care funcţia f este continuă.

a) $\{-\sqrt{2}, 0\}$; b) $\{-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}\}$; c) $\{0, \sqrt{2}\}$; d) $\{0, 1, \sqrt{2}\}$; e) $\{-\sqrt{2}, 0, 1, \sqrt{2}\}$; f) $\{-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\}$.

2.712C Pentru ce valori ale lui $a, b \in \mathbb{R}$ funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{a}{x^2}, & x < 0 \\ ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$$

este continuă ?

a) $a = b = 1$; b) $a = b$; c) $a \in \mathbb{R}$ şi $b = 0$; d) f este discontinuă pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$; e) $a = 0$ şi $b \in \mathbb{R}$; f) $a = 0, b = 1$.

2.713C Fie $f : [0,2] \to [0,1]$ definită de $f(x) = x - [x]$ (unde [ ] este funcţia "parte întreagă"). Atunci

a) f este continuă; b) $\operatorname{Im} f$ nu este un interval;
c) $\operatorname{Im} f$ este un interval, iar f are proprietatea lui Darboux;
d) f nu are proprietatea lui Darboux cu toate că $\operatorname{Im} f$ este un interval;
e) f nu este continuă, dar are proprietatea lui Darboux;
f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

2.4 Derivabilitate

2.714A Se consideră funcţia

$$f\colon \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x), & -\dfrac{1}{2} < x \leq 0, \\ \alpha x, & x > 0, \end{cases}$$

unde α este un parametru real. Să se determine α astfel încât f să fie derivabilă în punctul $x = 0$.

a) $\alpha = 2$; b) $\alpha = -3$; c) $\alpha = -1$; d) $\alpha = 1$; e) $\alpha = 3$; f) $\alpha = -2$.

2.715A Care dintre următoarele derivate este cea corectă ?

a) $f(x) = e^{x^2}$, $f'(x) = (1+x)e^{x^2}$; b) $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$, $f'(x) = \frac{-1}{(1+|x|)^2}$;
c) $f(x) = \ln(1+e^x)$, $f'(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$; d) $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \sin x$;

a) f este funcţia nulă; b) $f(x) = x$; c) nu există; d) f este constantă; e) f este o funcţie de gradul al doilea; f) f este o funcţie de gradul întâi.

2.705C Fie $0 < a < 1$ şi $b > 0$. Atunci ecuaţia $x = a\sin x + b$:

a) nu are soluţii pozitive; b) nu are soluţii reale; c) are cel puţin o soluţie în $(0, a+b]$; d) are soluţia $2a + 2b$; e) are soluţia $b + 1$; f) are cel puţin o soluţie în $(a + b, 2a + 2b)$.

2.706C Să se afle tipul funcţiei elementare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuă pe $\mathbb{R}$, pentru care $f(0) = 1/2$, $f(x) - f(x/2) = x$.

a) exponenţială; b) polinom de gradul întâi; c) polinom de gradul doi;
d) logaritmică; e) funcţie constantă; f) $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$.

2.707C Să se determine numărul de soluţii ale ecuaţiei $x^3 + 4x - 6 = 0$ situate în intervalul $[1, 2]$.

a) 0; b) 2; c) 3; d) 1; e) o infinitate; f) cel puţin două.

2.708C Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dintre variantele a),..,f) alegeţi pe aceea pentru care propoziţia "f şi g sunt discontinue în origine şi totuşi $f \circ g$ este continuă în origine" este adevărată.

a) $f(x) = |x|, g(x) = \operatorname{sgn} x$; b) $f(x) = x^2, g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \pi, & x = 0 \end{cases}$; d) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = |x|$; e) $f(x) = [x], g(x) = \sin x$; f) $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$.

2.709C Fie $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \cap (0,1) \\ 1 - x, & \text{dacă } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0,1). \end{cases}$

Care afirmaţie este adevărată ?

a) f nu este continuă şi are proprietatea lui Darboux; b) f este continuă;
c) f este derivabilă; d) f nu este continuă şi nu are proprietatea lui Darboux;
e) f este continuă şi are proprietatea lui Darboux;
f) nici una dintre afirmaţiile anterioare nu este adevărată.

2.710C Se dau funcţiile $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0, 2)$, $g : (0, 2) \to \mathbb{R}$ şi $h : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}x, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ \dfrac{x+1}{3}, & \text{dacă } x \in (1, 2) \end{cases}, \quad h(x) = \cos x \text{ şi } h = g \circ f.$$

Dacă $A = \left\{x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \mid f \text{ este discontinuă în } x\right\}$, atunci

a) $A = \varnothing$; b) $A = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right\}$; c) $A = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\}$; d) $A = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$; e) $A = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right\}$;
f) $A = \left\{\arccos \frac{2}{3}\right\}$.

2.711C Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 - 2 & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Determinaţi mulţimea punctelor în care funcţia f este continuă.

a) $\{-\sqrt{2}, 0\}$; b) $\{-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}\}$; c) $\{0, \sqrt{2}\}$; d) $\{0, 1, \sqrt{2}\}$; e) $\{-\sqrt{2}, 0, 1, \sqrt{2}\}$;
f) $\{-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\}$.

2.712C Pentru ce valori ale lui $a, b \in \mathbb{R}$ funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{a}{x^2}, & x < 0 \\ ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$$

este continuă ?

a) $a = b = 1$; b) $a = b$; c) $a \in \mathbb{R}$ şi $b = 0$; d) f este discontinuă pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$; e) $a = 0$ şi $b \in \mathbb{R}$; f) $a = 0, b = 1$.

2.713C Fie $f : [0, 2] \to [0, 1]$ definită de $f(x) = x - [x]$ (unde $[\ ]$ este funcţia "parte întreagă"). Atunci

a) f este continuă; b) $\operatorname{Im} f$ nu este un interval;
c) $\operatorname{Im} f$ este un interval, iar f are proprietatea lui Darboux;
d) f nu are proprietatea lui Darboux cu toate că $\operatorname{Im} f$ este un interval;
e) f nu este continuă, dar are proprietatea lui Darboux;
f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

2.4 Derivabilitate

2.714A Se consideră funcţia

$$f\colon \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \ln(1 + 2x), & -\dfrac{1}{2} < x \leq 0, \\ \alpha x, & x > 0, \end{cases}$$

unde α este un parametru real. Să se determine α astfel încât f să fie derivabilă în punctul $x = 0$.

a) $\alpha = 2$; b) $\alpha = -3$; c) $\alpha = -1$; d) $\alpha = 1$; e) $\alpha = 3$; f) $\alpha = -2$.

2.715A Care dintre următoarele derivate este cea corectă ?

a) $f(x) = e^{x^2}$, $f'(x) = (1 + x)e^{x^2}$; b) $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$, $f'(x) = \frac{-1}{(1+|x|)^2}$;
c) $f(x) = \ln(1 + e^x)$, $f'(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$; d) $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \sin x$;

e) $f(x)=\sqrt{x}$, $f'(x)=2x$; f) $f(x)=1$, $f'(x)=1$.

2.716A Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ şi $\lambda=f'(0)$. Atunci

a) $\lambda=-1$; b) $\lambda=0$; c) $\lambda=1$; d) $\lambda=\infty$; e) $\lambda=-\infty$; f) f nu are derivată în $x=0$.

2.717A Care este valoarea lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia

$$f:[0,2\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in(0,\pi)\\ ax+\pi, & x\in[\pi,2\pi]\end{cases}$$

este derivabilă ?

a) $a=\pi$; b) $a=-\pi$; c) $a=1$; d) $a=-1$; e) $a=\frac{\pi}{2}$; f) $a=2$;

2.718A Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Punctele în care f nu este derivabilă sunt

a) $-2,2$; b) $\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$; c) $-1,1$; d) $-e,e$; e) 0; f) funcţia este derivabilă.

2.719A Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4e^{2x}$. Atunci valoarea lui $f^{(5)}(0)$ este

a) 1; b) 0; c) $\frac{1}{4!}$; d) $10\cdot 4!$; e) $\frac{1}{5}$; f) $\frac{4}{5}$.

2.720A Derivata funcţiei $f(x)=x^x-a^x-x^a$, $x>0$, $a>0$, în punctul $x=a$ este

a) a; b) 0; c) a^a; d) $a^a\ln a$; e) $a^a(1+\ln a)$; f) $a^a\left(1-\frac{1}{a}\right)$.

2.721A Derivata laterală la dreapta, $f'_d(0)$, în punctul $x=0$, a funcţiei $f:[0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$, $f(x)=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$, este

a) 1; b) 0; c) $-\infty$; d) ∞; e) -1; f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.722A Fie $f:(-2\pi,2\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt[3]{\sin x}$. Să se determine punctele în care f nu este derivabilă, dar are derivată.

a) $0,\pm\pi$; b) $\pm\pi$; c) $\pm\frac{\pi}{2}$; d) $0,\pm\frac{\pi}{2}$; e) $0,\pm\frac{3\pi}{2}$; f) nu există.

2.723A Derivatele laterale $f'_s(\pi)$, $f'_d(\pi)$ ale funcţiei $f(x)=|\cos x|$ sunt

a) $1,-1$; b) $-1,1$; c) 0,0; d) 1,1; e) $-1,-1$; f) nu există.

2.724A Să se precizeze dacă funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$, $g(x)=x|x|$ sunt derivabile în origine

a) f da, g nu; b) ambele; c) nici una; d) f nu, g da; e) nu se pune problema; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

2.725A Derivata funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^5+\ln(x+1)$$

în punctul $x=1$ este

a) 1; b) 5; c) $\frac{1}{4}$; d) 5!; e) $\frac{1}{12}$; f) $\frac{4}{5}$.

2.726A Derivata funcţiei $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\frac{1-x}{1+x}$$

în punctul $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ este

a) 1; b) π; c) $\frac{\pi}{4}$; d) 0; e) $\frac{\pi}{2}$; f) $\frac{1}{2}$.

2.727A Fie $f:(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+\sqrt{x^2-1})^\alpha$, $(\alpha\in\mathbb{R})$. Pentru orice $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, valoarea expresiei

$$E(x)=(x^2-1)f''(x)+xf'(x)$$

este

a) $\alpha^2 f(x)$; b) $f(x)$; c) 0; d) $f'(x)$; e) $\alpha f'(x)$; f) $\alpha^2 f'(x)$.

2.728A Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^2+ax+1}$, $a\in\mathbb{R}$. Pentru ce valori ale lui a funcţia este derivabilă pe $\mathbb{R}$?

a) $a\in(-2,2)$; b) $a\in\mathbb{R}$; c) $a=0$; d) $a\in(-\infty,-2]\cup(2,\infty)$; e) $a>2$; f) nu există.

2.729A Să se determine parametrii reali a,b astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x^4+ax+2, & x<0\\ b+\ln(1+x^4), & x\geq 0\end{cases}$$

să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

a) $a=0$, $b=2$; b) $a=2$, $b=0$; c) $a=1$, $b=-1$; d) $a=-1$, $b=1$; e) $a=1$, $b=2$; f) $a=0$, $b\in\mathbb{R}$.

2.730A Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x^2+b, & x\leq 2\\ 2ax^3+11a, & x>2\end{cases}$ să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

a) $a=1,b=1$; b) $a=2,b=3$; c) $a=\frac{1}{3},b=-1$; d) $a=1,b=2$; e) $a=\frac{1}{3},b=1$; f) $a=b=1$.

2.731A Să se calculeze $f'(0)$ pentru $f(x)=2^{|x+1|}$.

a) f nu este derivabilă; b) $2\ln 2$; c) 1; d) $\ln 2$; e) 2; f) 1.

2.732A Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este derivabilă şi impară. Atunci

a) f' este impară; b) $f' = 0$; c) f' este pară; d) f' nu este nici pară nici impară; e) $f'(0) = 0$; f) f' este crescătoare.

2.733A Ştiind că u şi v sunt funcţii derivabile stabiliţi care dintre următoarele reguli de derivare este greşită.
a) $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}u', u \neq 0$; b) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}, v \neq 0$;
c) $(u^v)' = u^v(v\ln u)', u > 0, u \neq 1$; d) $\left(\frac{au+b}{cu+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2}u', a, b, c, d \in \mathbb{R}$;
e) $(\log_a u)' = \frac{1}{\ln a}\frac{u'}{u}, u > 0, a > 0, a \neq 0$; f) $(a^u)' = a^u u', a > 0, a \neq e$.

2.734A Se consideră funcţia $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\left\{x, \dfrac{2}{1+x^2}\right\}$. Să se determine $\{a \in [0,2] \mid f'(a) \text{ nu există}\}$.
a) $\varnothing$; b) $\{1\}$; c) $\{0,1\}$; d) $\{1,2\}$; e) $(0,1)$; f) $[1,2]$.

2.735A Să se determine derivata funcţiei $f(x) = x^{x^2+1}, x > 0$.
a) $(x^2+1)x^{x^2}$; b) $x^{x^2+1}\ln x$; c) $x^{x^2+1}(2x)\ln x$; d) $x^{x^2+1}\ln x + x^{x^2+1}$;
e) $(x^2+1)x^{x^2} + 2x^{x^2+2}\ln x$; f) $(x^2+1)x^{x^2} + 2x^{x^2+1}\ln x$.

2.736A Determinaţi constantele reale l şi m astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + l & \text{dacă } x \leq 2 \\ mx + 3l - 6 & \text{dacă } x < 2 \end{cases}$$

să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.
a) $l = 0, m = 2$; b) $l = -1, m = 3$; c) $l = -3, m = 5$; d) $l = 1, m = 1$; e) $l = 2, m = 0$; f) $l = -2, m = 4$.

2.737A Să se determine constantele reale a şi b astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + ax + 2, & \text{dacă } x < 0 \\ b + \ln(1+x^2), & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.
a) $a = 1, b = 1$; b) $a = 2, b = 2$; c) $a = 1, b = 2$; d) $a = 1, b = -1$; e) $a = 0, b = 2$; f) $a = 0, b \in \mathbb{R}$.

2.738A Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$ şi $l = f'(1)$. Atunci
a) $l = 2$; b) $l = 0$; c) $l = -2$; d) l nu există; e) $l = 1$; f) $l = -1$.

2.739A Derivatele funcţiilor $f(x) = \sin(\arccos x) + \cos(\arcsin x)$, $x \in (-1,1)$

a) $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$, $g'(x) = 0$; b) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$, $g'(x) = 1$;
c) $f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$, $g'(x) = -1$; d) $f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$, $g'(x) = 0$;
e) $f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$, $g'(x) = 2$; f) $f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$, $g'(x) = -2$.

2.740B Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$. Aflaţi $n \in \mathbb{N}^*$ ştiind că $f^{(n)}(0) = -72$.
a) $n = 4$; b) $n = 8$; c) $n = 9$; d) $n = 11$; e) $n = 12$; f) $n = 6$.

2.741B Fie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin(\alpha \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$. Pentru orice $x \in (-1,1)$, valoarea expresiei $E(x) = (x^2-1)f''(x) + 3xf'(x) - (\alpha^2-1)f(x)$ este
a) $\alpha^2 f(x)$; b) $f(x)$; c) 0; d) $f'(x)$; e) $\alpha f'(x)$; f) $\alpha^2 f'(x)$.

2.742B Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 0 \\ -x^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}$. Să se calculeze $(f^{-1})'(3)$.
a) $\frac{1}{4}$; b) $-\frac{1}{4}$; c) funcţia nu admite inversă; d) $\frac{1}{2}$; e) 1; f) $\frac{1}{3}$.

2.743B Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
Punctele de derivabilitate ale lui f sunt
a) 0; b) $\mathbb{R}$; c) nu există; d) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; e) $\mathbb{R} \setminus \{0, \frac{2}{\pi}\}$; f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2.744B Fie funcţia $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + x + ... + x^n}{x^n}$. Atunci
a) $f'(3) = 0$; b) $f'(3) = \frac{1}{4}$; c) $f'(3) = -1$; d) $f'(3) = -\frac{1}{4}$; e) $f'(3) = 1$; f) $f'(3) = \frac{1}{2}$.

2.745B Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2+x)}, & x \in (-1,0) \\ a, & x \notin (-1,0) \end{cases}$$

să fie derivabilă.
a) $a = 0$; b) $a = 1$; c) $a = 2$; d) $a = 3$; e) $a = 4$; f) nu există.

2.746B Se consideră funcţia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^m \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$.
Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ dacă f este derivabilă o dată, dar nu de două ori pe $\mathbb{R}$.
a) $m = 1$; b) $m > 1$; c) $m \in (1,3]$; d) $m = 4$; e) $m \in [1,3]$; f) nu există.

2.747B Fie $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{3x^3}+\ln\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arctg}x, x\neq 0$. Atunci

a) $f'(2)=\frac{33}{80}$; b) $f'(2)=\frac{32}{75}$; c) $f'(2)=\frac{32}{65}$; d) $f'(2)=1$; e) $f'(2)=3$; f) $f'(2)=-\frac{33}{79}$.

2.748B Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-x}x^2$ are derivata de ordin $n, n\geq 0$, scrisă sub forma $f^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x}(x^2+a_nx+b_n)$. În acest caz, a_n şi b_n au valorile:

a) $a_n=-2n, b_n=n^2-n$; b) $a_n=2n, b_n=n^2$; c) $a_n=-2n, b_n=n$;
d) $a_n=2n, b_n=2n^2$; e) $a_n=-2n, b_n=n^2+n$; f) $a_n=2n, b_n=n$.

2.749B Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este derivabilă de două ori şi $f''(1)=1$. Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(ax+1), a\neq 0$. Atunci $g''(0)$ are valoarea

a) 1; b) 0; c) a; d) a^2; e) $-a$; f) 2.

2.750B Derivata de ordinul n, $n\geq 2$ a funcţiei $f(x)=x\ln(x+1), x>-1$ este

a) $\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^{n-1}}+\dfrac{n!}{(x+1)^n}$; b) $\dfrac{(n-2)!}{(x+1)^{n-1}}+(-1)^n\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}$;
c) $(-1)^n\dfrac{(n-2)!}{(x+1)^{n-1}}+(-1)^n\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}$; d) $(-1)^n\dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$;
e) $(-1)^{(n-1)}\dfrac{(n-2)!}{(x+1)^{n-1}}+(-1)^n\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}$; f) $(-1)^n\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^{n+1}}$.

2.751B Fie $f(x)=\dfrac{e^{\lambda x}}{x^2+\lambda^2}, \lambda\in\mathbb{R}^*$. Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $f'(x)=0$ calculaţi $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\dfrac{1+x_1x_2}{1-x_1x_2}\right)^{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}$.

a) 1; b) e^2; c) e; d) 0; e) $\sqrt{e}$; f) $+\infty$.

2.752B Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{|x^2-6x+5|}{1+x^2}$. Atunci

a) f are limite la stânga şi la dreapta în punctul $x=5$; b) f este derivabilă în $x=1$; c) f este crescătoare; d) f este pară; e) graficul lui f admite asimptotică oblică; f) f este periodică.

2.753B În ce puncte din interiorul domeniului maxim de definiţie D, funcţia $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$ nu este derivabilă ?

a) 10; b) 3; c) 1; d) 2; e) 8; f) 9.

2.754B Dacă $f:(0,\infty)\to(0,\infty),\ f(x)=(x^3)^{x^2}$, atunci $f'(2)$ este

a) $8^3(4+32\ln 8)$; b) $8^4(6+\ln 8)$; c) $8^4(6+2\ln 64)$; d) $8^4\cdot 6$; e) $8^4\cdot 4\ln 8$; f) $8^3\cdot 4$.

2.755B Pentru ce valori ale lui $a,b\in\mathbb{R}$ funcţiile $f(x)=x\ln(1+a|x|)$ şi $g(x)=\begin{cases} ax+b, & x\leq \mathrm{e}\\ \ln^3 x, & x>\mathrm{e}\end{cases}$ sunt derivabile ?

a) $a=b=0$; b) nu există; c) $a=\dfrac{3}{\mathrm{e}}, b=-2$; d) $a=\mathrm{e}, b=0$; e) $a=\mathrm{e}, b\in\mathbb{R}$; f) $a\in\mathbb{R}, b=1$.

2.756C Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+x+1$ şi fie $\lambda=(f^{-1})'(3)$. Atunci

a) $\lambda=\frac{1}{2}$; b) $\lambda=\frac{1}{3}$; c) $\lambda=\frac{1}{4}$; d) $\lambda=-\frac{1}{2}$; e) $\lambda=-1$; f) $\lambda=\frac{4}{3}$.

2.757C Fie $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=\sqrt[3]{x^5-2x^4-2x^3+4x^2+x-2}$ şi fie M mulţimea punctelor în care h nu are derivată. Fie k numărul elementelor lui M. Avem:

a) $M=\varnothing$; b) $k=1$; c) $k=2$; d) $k=3$; e) $k=4$; f) $k=5$.

2.758C Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x+x+m$ şi M mulţimea acelor $m\in\mathbb{R}$ pentru care f este bijectivă. Pentru $m\in M$ calculaţi $\lambda=(f^{-1})'(m+1)$.

a) $\lambda=\frac{1}{2}$; b) $\lambda=m$; c) $\lambda=m-1$; d) $\lambda=-\frac{1}{m^2+1}$; e) $\lambda=-1$;
f) $(\exists)\, m\in M$ pentru care f^{-1} nu este derivabilă în $m+1$.

2.759C Fie $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}, x\in\mathbb{R}$ şi $g(x)=2\operatorname{arctg}x, x\in\mathbb{R}$. Care afirmaţie este adevărată ?

a) $f'(x)=g'(x), \forall|x|\leq 1$; b) $f'(x)=g'(x), \forall|x|<1$;
c) $f'(x)=g'(x), \forall|x|>1$; d) $f'(x)=g'(x), \forall|x|\geq 1$;
e) $f'(x)=g'(x), \forall x\in\mathbb{R}$; f) $f'(x)=g'(x), \forall|x|>-1$.

2.760C Să se calculeze $\ell=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

a) $\ell=2$; b) $\ell=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$; c) $\ell=-\infty$; d) $\ell=\sqrt{\mathrm{e}}$; e) $\ell=\dfrac{1}{2}$; f) $\ell=+\infty$.

2.761C Se consideră funcţia $f:(\mathrm{e},\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\dfrac{1}{x}\right)$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)$.

a) -1; b) 1; c) 2; d) e; e) $\frac{1}{\mathrm{e}}$; f) funcţia nu este derivabilă.

2.762C Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi să se calculeze $f^{(n)}(0)$ pentru $n\geq 1$.

a) 1; b) 0; c) e^{-1}; d)-1; e) $\ln 2$; f) $\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}$.

2.763C Fie $f(x) = e^{2x}$ şi $g(x) = e^{-x}$. Fie $a = f^{(10)}(-1) + g^{(19)}(2)$. Atunci
a) $a = 0$; b) $a = (2^{10} - 1)e^{-2}$; c) $a = 2^{10}e^2 + e^{-2}$; d) $a = 32e^2 - e^{-2}$;
e) $a = 1024e^2 + e^{-2}$; f) $a = 256e - e^{-2}$.

2.764C Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$, este derivabilă pe $\mathbb{R}$, $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este la rândul ei derivabilă pe $\mathbb{R}$, dar $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deşi este continuă pe $\mathbb{R}$, nu mai este derivabilă în punctul $x = 0$. Această situaţie se întâmplă pentru
a) $n = 1$; b) $n = 2$; c) $n = 3$; d) $n = 4$; e) $n = 5$; f) $n = 6$.

2.765C Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 4$. Ştiind că f este bijectivă, să se calculeze $(f^{-1})'(4)$.
a) 1/3; b) 0; c) 1/2; d) 1; e) 1/4; f) 2.

2.766C Fie $g(x) = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}, x \geq 0$. Să se determine $\lim\limits_{x \searrow 0} g^{(n)}(x)$.
a) $\frac{1}{(2n-1)!!}$; b) $\frac{1}{2^n(2n-1)!}$; c) $\frac{1}{2^{n+1}}$; d) $\frac{2^n}{(2n+1)!}$; e) $\frac{1}{2^{n-1}(2n-1)!!}$; f) $\frac{1}{2^n(2n-1)!!}$.

2.767C Punctele de continuitate ale funcţiei $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^3, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ se află în mulţimea
a) $(1,2)\cup(8,9)$; b) $(1,2)$; c) $(1,2)\cup(9,10)$; d) $(0,1)\cup(10,11)$; e) $(2,3)\cup(9,10)$;
f) $(9,10)$.

2.768C Fie $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, şi $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}(1)$, unde $f^{(k)}$ înseamnă derivata de ordin k ($f^{(0)} = f$, $0! = 1$). Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
a) $\dfrac{\pi^2}{8}$; b) $\dfrac{1}{e}$; c) ∞; d) 0; e) 1; f) nu există.

2.769C Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} A\,e^{2x}, & x \leq 0 \\ \sin 2x + B\cos 3x, & x > 0 \end{cases}$. Să se determine constantele reale A şi B astfel încât f să fie derivabilă.
a) $A = B = 1$; b) $A = B = 2$; c) $A = 1, B = 2$;
d) $A = 2, B = 1$; e) $A = B = -1$; f) $A = B = 3$.

2.770C Se dă $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Atunci
a) f nu este continuă în $x = 0$; b) f nu este derivabilă în $x = 0$; c) f este derivabilă în $x = 0$, dar f' nu este continuă în $x = 0$; d) f este derivabilă în $x = 0$ şi f' este continuă în $x = 0$; e) f este derivabilă de două ori în $x = 0$;
f) f este derivabilă de oricâte ori în $x = 0$.

2.771C Dacă notăm prin $[a]$ partea întreagă a numărului real a, atunci funcţia
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right], & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$
a) este derivabilă; b) este continuă; c) este derivabilă în $x = 1$; d) este continuă în $x = 1$; e) este continuă în $x = 0$; f) este derivabilă în $x = -1$.

2.772C Pentru funcţia $f(x) = (x+1)^{2/3} + (x-1)^{2/3}$, $x \in \mathbb{R}$, punctele $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ sunt
a) puncte critice (cu derivata nulă); b) puncte de discontinuitate; c) puncte de derivabilitate; d) puncte unghiulare; e) puncte cu derivata infinită; f) puncte de întoarcere.

2.5 Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatei

2.773A Soluţiile reale ale ecuaţiei $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0$ unde $a \in (5, 32)$ verifică
a) $x_1, x_2, x_3 \in (-1, 0)$; b) $x_1, x_2 \in (-1, 2)$; c) $x_1, x_2 \in (2, 3)$;
d) $x_1 \in (0, 2), x_2 \in (2, 3)$; e) $x_1 \in (3, 4)$; f) $x_1, x_2, x_3 \in (2, 3)$.

2.774A Pentru funcţia $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3}, & x \in [-2, 1) \\ \frac{x+7}{4}, & x \in [1, 5] \end{cases}$, $x \in [-2, 5]$, punctul intermediar "c" din teorema creşterilor finite a lui Lagrange este
a) $c = 0$; b) $c = -1$; c) $c = 2$; d) $c = \frac{1}{2}$; e) $c = \frac{1}{16}$; f) $c = \frac{1}{4}$.

2.775A Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x$, $g(x) = -x + \cos x$. Să se precizeze care dintre afirmaţiile următoare este adevărată.
a) f, g sunt strict crescătoare; b) f, g sunt strict descrescătoare; c) f este strict crescătoare, g strict descrescătoare; d) f este strict descrescătoare, g strict crescătoare; e) nici una din funcţii nu este monotonă; f) numai una din funcţii este monotonă.

2.776A Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2e^x$ este
a) strict crescătoare pe $(-\infty, -2]$, strict descrescătoare pe $[0, \infty)$ şi $[-2, 0]$;
b) strict descrescătoare pe $(-\infty, -2]$, strict crescătoare pe $[0, \infty)$ şi $[-2, 0]$;
c) strict crescătoare pe $(-\infty, -2]$ şi $[-2, 0]$, strict descrescătoare pe $[0, \infty)$;
d) strict crescătoare pe $(-\infty, -2]$ şi $[0, \infty)$, strict descrescătoare pe $[-2, 0]$;
e) strict descrescătoare pe $(-\infty, -2]$ şi $[-2, 0]$, strict crescătoare pe $[0, \infty)$;
f) strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2.777A Studiaţi monotonia funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)\ln x$.

a) strict crescătoare pe $(0,1]$, strict descrescătoare pe $[1,\infty)$; b) strict descrescătoare pe $(0,1]$, strict crescătoare pe $[1,\infty)$; c) strict crescătoare pe $(0,1]$ şi pe $[1,\infty)$; d) strict descrescătoare pe $[0,1]$ şi pe $[1,\infty)$; e) strict descrescătoare pe $(0,2]$, strict crescătoare pe $[2,\infty)$; f) strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

2.778A Funcţia $f:(-\infty,-1)\cup(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ este

a) strict crescătoare pe $(-\infty,-1)$, strict descrescătoare pe $(-1,\infty)$;
b) strict descrescătoare pe $(-\infty,-1)$, strict crescătoare pe $(-1,\infty)$;
c) strict crescătoare pe $(-\infty,-1)$ şi pe $(0,\infty)$;
d) strict descrescătoare pe $(-\infty,-1)$ şi pe $(-1,\infty)$;
e) strict descrescătoare pe $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$;
f) strict crescătoare pe $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$.

2.779A Fie $f:[1,6]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{8}+\frac{2}{x}$, şi notăm $m=\min f$, $M=\max f$. Avem:

a) $m=1$, $M=\frac{15}{8}$; b) $m=1$, $M=\frac{17}{8}$; c) $m=2$, $M=\frac{17}{8}$; d) $m=2$, $M=\frac{9}{4}$; e) $m=\frac{3}{2}$, $M=2$; f) $m=\frac{9}{4}$, $M=3$.

2.780A Fie $f:[-2,0]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$, şi notăm $m=\min f$, $M=\max f$. Avem:

a) $m=0$, $M=1$; b) $m=1$, $M=\frac{5}{2}$; c) $m=2$, $M=\frac{5}{3}$; d) $m=\frac{1}{2}$, $M=\frac{3}{2}$; e) $m=\frac{3}{2}$, $M=2$; f) $m=\frac{1}{4}$, $M=1$.

2.781A Fie $f:[0,10]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x(10-x)}$, şi notăm $m=\min f$, $M=\max f$. Avem:

a) $m=0$, $M=1$; b) $m=1$, $M=\frac{3}{2}$; c) $m=2$, $M=\frac{7}{2}$; d) $m=\frac{1}{2}$, $M=\frac{3}{2}$; e) $m=\frac{3}{2}$, $M=2$; f) $m=0$, $M=5$.

2.782A Să se calculeze $\lim\limits_{x\searrow 0}x(\operatorname{ctg}x+\ln x)$.

a) nu există; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{3}$; d) -1; e) $\frac{1}{2}$; f) 1.

2.783A Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

a) $\frac{1}{4}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{3}$; d) -1; e) $\frac{1}{2}$; f) nu există.

2.784A Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+mx)e^{-x}$. Valorile parametrului $m\in\mathbb{R}$ pentru care f admite două puncte de extrem sunt

a) $m=2$; b) $m=-2$; c) $m\in\mathbb{R}$; d) $m>2$; e) $m\le 2$; f) nu există.

2.785A Fie $f:(-2,2)\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln[x^2(4-x^2)]$. Suma valorilor extreme ale funcţiei f este

a) $4\ln 2$; b) $2\ln 2$; c) 0; d) $-\sqrt{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\sqrt{2}$.

2.786A Fie $a\in\mathbb{R}$ şi $f:\mathbb{R}\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x-a}$. Să se determine valorile lui a pentru care f admite două puncte de extrem.

a) $a=1$; b) $a\in[1,\infty)$; c) $a\in(-\infty,1]$; d) $a\in[0,1]$; e) $a\in\mathbb{R}$; f) nu există.

2.787A Să se determine punctele critice pentru funcţia $f(x)=x^2e^x$.

a) $x=0$; b) $x=-2$; c) $x\in\{0,-2\}$; d) $x=-1$; e) $x\in\varnothing$; f) $x=1$.

2.788A Fie $a=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$. Atunci

a) $a>b$; b) $a=b$; c) $a+b=3$; d) $a-b=2$; e) $ab=4$; f) $a=3b$.

2.789A Fie funcţiile $f,g:[-1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x$, $g(x)=x^3+3x$. Valoarea lui c care rezultă din aplicarea teoremei Cauchy, pentru aceste funcţii este

a) $c=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$; b) $c=-\frac{1}{2}$; c) $c=\frac{1}{2}$; d) $c=\frac{3}{2}$; e) $c=\frac{1}{4}$; f) nu există.

2.790A Fie funcţia

$$f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2+mx+n, & x\in[-1,0]\\ px^2+4x+4, & x\in(0,1]\end{cases},\ m,n,p\in\mathbb{R}.$$

Notăm S suma valorilor m,n,p pentru care f satisface teorema lui Rolle pe $[-1,1]$ şi T mulţimea punctelor c care se obţin aplicând această teoremă. Atunci

a) $S=1, T=\{-\frac{2}{7}\}$; b) $S=1, T=\{\frac{2}{7}\}$; c) $S=-1, T=\{\frac{2}{7}\}$; d) $S=8, T=\{\frac{1}{2}\}$; e) $S=15, T=\{\frac{2}{7}\}$; f) $S=-1, T=\{-\frac{2}{7}\}$.

2.791A Să se aplice teorema lui Lagrange funcţiei

$$f(x)=\begin{cases}2x^3+x^2, & x\in[0,1)\\ -2x^2+12x-7, & x\in[1,4]\end{cases}$$

şi să se determine punctele c care rezultă din aplicarea acesteia.

a) $\frac{\sqrt{59}+2}{12}$ şi $\frac{\sqrt{59}-2}{12}$; b) $\frac{\sqrt{59}-2}{12}$ şi $-\frac{\sqrt{59}+2}{12}$; c) $\frac{38}{16}$ şi $\frac{1}{2}$; d) $\frac{39}{16}$ şi $\frac{\sqrt{59}-2}{12}$; e) $\frac{39}{16}$ şi $\frac{\sqrt{58}-2}{12}$; f) $\frac{\sqrt{59}-2}{12}$ şi $\frac{\sqrt{19}}{4}$.

2.792A Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n-\sin^n x}{x^{n+2}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) 0; b) $\frac{n+1}{12}$; c) $\frac{n}{6}$; d) $\frac{2-n}{6}$; e) ∞; f) $\frac{3-n}{12}$.

2.793A Funcţiei $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} a\ln(1+x), & x\in[0,1) \\ 2x^2+x+b, & x\in[1,2]\end{cases}$, i se poate aplica teorema lui Rolle pe [0,2], dacă

a) $a=1, b=0$; b) $a=1, b=-3+\ln 2$; c) $a=10, b=-10$; d) $a=1, b\in\mathbb{R}$; e) $a=\frac{1}{\ln 2}, b=-2$; f) oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$ teorema nu se poate aplica.

2.794A Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x^3}$. Atunci

a) $x=1$ este punct de minim; b) $x=1$ este punct de maxim; c) $x=3$ este punct de minim; d) $x=3$ este punct de maxim; e) f nu are puncte de extrem; f) f este convexă.

2.795A Să se indice numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $x^3-3x-10=0$.

a) două; b) nici una; c) una; d) trei; e) nu poate fi determinat; f) ecuaţia are două soluţii egale.

2.796A Să se determine numărul soluţiilor reale şi intervalele în care se află ele pentru ecuaţia $x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2-1=0$.

a) $x_1\in(-\infty,-2)$ şi $x_2\in(1,\infty)$; b) $x_1\in(-2,0)$ şi $x_2\in(0,1)$; c) $x_1\in(0,1)$; d) $x_2\in(-2,0)$; e) nici o rădăcină reală; f) $x_1\in(-\infty,-2)$, $x_2\in(-2,1)$, $x_3\in(1,\infty)$.

2.797A Funcţia $f(x)=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ este

a) convexă pe $\mathbb{R}$; b) concavă pe $\mathbb{R}$; c) concavă pe $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$, convexă pe $(-1,1)$; d) concavă pe $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, convexă pe $\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; e) convexă numai pe $(0,\infty)$; f) concavă pe $(-\infty,0)$.

2.798A Fie $a=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ şi $b=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2^x}$. Atunci

a) $ab=\frac{1}{2}$; b) $a+b=1$; c) $ab=1$; d) $a+b=\frac{1}{2}$; e) $a-b=0$; f) $a-b=1$.

2.799A Fie $f(x)=mx-\ln(1+x^2)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, şi $A=\{m\in\mathbb{R}\mid f \text{ este crescătoare}\}$. Care afirmaţie este adevărată ?

a) $A=(-1,1)$; b) $A=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; c) $A=[1,\infty)$; d) $A=\varnothing$; e) $A=(-\infty,-1)$; f) $A=(1,\infty)$.

2.800B Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$. Care dintre următoarele afirmaţii este adevarată ?

a) f are două puncte de extrem; b) f are un punct de maxim; c) f nu are puncte de extrem; d) f are un singur punct de extrem; e) f are un punct de inflexiune; f) f este crescătoare.

2.801B Să se determine parametrii reali a şi b astfel încât graficele funcţiilor

$$f(x)=ax^2+bx+2,\quad g(x)=1-\frac{1}{x}$$

să aibă tangentă comună în punctul de abscisă $x=1$.

a) $a=2,\ b=-3$; b) $a=-1,\ b=2$; c) $a=3,\ b=-5$; d) $a=1,\ b=-1$; e) $a=-2,\ b=3$; f) $a=2,\ b=4$.

2.802B Fie $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & x\in[-1,0) \\ 1+\ln(x^2+1), & x\in(0,1]\end{cases}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$ sunt astfel încât lui f i se poate aplica teorema lui Rolle pe $[-1,1]$. Dacă $S=a+b+c$, atunci

a) $S\in\left(1,\frac{5}{3}\right)$; b) $S\in\left(\frac{5}{3},\frac{7}{4}\right)$; c) $S\in\left(\frac{7}{4},3\right)$; d) $S\in(-1,0)$; e) $S\in(-2,-1)$; f) $S\in(3,4)$.

2.803B Fie M mulţimea valorilor $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuaţia

$$\tfrac{1}{3}x^3+x^2-x-2\ln x+m=0$$

admite două soluţii reale distincte. Atunci

a) $M=\varnothing$; b) $M=\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$; c) $M=(-\infty,0)$; d) $M=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; e) $M=\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$; f) $M=(1,\infty)$.

2.804B Fie $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+ax, & x\in[0,1] \\ x^3+mx^2+nx, & x\in(1,2]\end{cases}$, unde $a,m,n\in\mathbb{R}$ sunt astfel încât teorema lui Rolle poate fi aplicată funcţiei f pe intervalul $[0,2]$. Dacă M este mulţimea acelor $c\in(0,2)$ din teorema lui Rolle şi $\lambda=\sum\limits_{c\in M}c$, atunci

a) $\lambda=\frac{3}{2}$; b) $\lambda=\frac{2}{3}$; c) $\lambda=\frac{13}{6}$; d) $\lambda=\frac{11+2\sqrt{7}}{6}$; e) $\lambda=\frac{1+\sqrt{7}}{3}$; f) $\lambda=\frac{11-\sqrt{7}}{3}$.

2.805B Ecuaţia $2\ln x=mx^2+1$ are două soluţii reale pentru

a) $m<-1$; b) $m\in(-1,0)$; c) $m\in\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$; d) $m\in(1,e)$; e) $m\geq e$; f) pentru nici o valoare a lui m.

2.806B Fie $f:[a,b]\to[a,b]$, f funcţie continuă. Atunci

a) $f(a)=a$; b) f este crescătoare; c) $f(a)=b$; d) există $c\in[a,b]$ astfel încât $f(c)=c$; e) f este derivabilă; f) f este funcţie Rolle.

2.807B Fie $f,g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$, $g(x)=\operatorname{arctg} x$. Atunci, pentru orice $x\in[-1,1]$, valoarea diferenţei $f(x)-g(x)$ este

a) $\frac{\pi}{2}$; b) $-\frac{\pi}{2}$; c) 0; d) $\frac{\pi}{2}$; e) $\pi+\arcsin x$; f) $\pi-\arcsin x$.

2.808B Fie $f,g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $g(x)=\operatorname{arcctg}x$. Atunci, pentru orice $x\in[0,\infty)$, valoarea diferenţei $f(x)-g(x)$ este

a) $\frac{\pi}{2}$; b) $-\frac{\pi}{2}$; c) x; d) $\frac{x}{2}$; e) $\pi+\arcsin x$; f) $-\frac{\pi}{4}$.

2.809B Fie $f(x)=x\ln x+ax^3$, $x>0$, şi

$$A=\{a\in\mathbb{R}\,|\,f \text{ are două puncte de inflexiune}\}.$$

Care afirmaţie este adevărată ?

a) $A=[0,\infty)$; b) $A=(-\infty,0)$; c) $A=(-\infty,0]$; d) $A=(0,\infty)$; e) $A=\varnothing$; f) $A=\{-\frac{1}{6}\}$.

2.810B Fie $f(x)=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ şi $g(x)=\arcsin x+\arccos x$, $x\in[-1,1]$. Care afirmaţie este adevărată ?

a) $f(x)=\frac{\pi}{2}$, $\forall x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$; b) f şi g sunt funcţii constante; c) f nu este funcţie constantă şi $g'(x)=0$, $\forall x\in(-1,1)$; d) nici f şi nici g nu sunt funcţii constante;

e) $f'(x)=0$, $\forall x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ şi $g'(0)\neq 0$; f) nici f şi nici g nu sunt funcţii derivabile.

2.811B Folosind monotonia funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$, să se pună în ordine crescătoare numerele $a=\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}$, $b=\left(\frac{8}{5}\right)^{8/5}$, $c=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$.

a) a,b,c; b) a,c,b; c) b,a,c; d) b,c,a; e) c,a,b; f) c,b,a.

2.812B Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

a) 0; b) 1; c) ∞; d) e; e) $\frac{1}{e}$; f) -1.

2.813B Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^n x\cos x$, unde $n\geq 2$ este întreg. Notând $M_n=\max\limits_{x\in\mathbb{R}}f(x)$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}M_n$.

a) 0; b) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; c) ∞; d) 1; e) nu există; f) $\frac{1}{e}$.

2.814B Ecuaţia $x^3-3x+m=0$, $m\in\mathbb{R}$:

a) nu are soluţii reale; b) are trei soluţii reale; c) nu are două soluţii distincte în $[0,1]$; d) are o soluţie triplă; e) are soluţii iraţionale; f) are soluţii negative.

2.815B Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+2x$. Există o infinitate de puncte $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $x_1\neq x_2$, astfel încât $f'(x_1)=f'(x_2)$ şi un singur punct

$x_0\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0+x)=-f(x_0-x),(\forall)\,x\in\mathbb{R}$. Valorile lui x_0 şi $s=x_1+x_2$ sunt:

a) $x_0=1,s=2$; b) $x_0=0,s=2$; c) $x_0=2,s=2$; d) $x_0=1,s=1$; e) $x_0=0,s=1$; f) $x_0=2,s=1$.

2.816B Să se determine punctele de extrem ale funcţiei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x^2e^{-x}, & x\geq 0\end{cases}.$$

a) $x\in\{0,2\}$; b) $x=0$; c) $x=2$; d) nu are puncte de extrem; e) $x\neq 0$; f) $x\in\{0,-2\}$.

2.817B Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$ şi x_1,x_2,x_3 abscisele punctelor sale de extrem. Să se determine E$=\sum\limits_{j=1}^{3}x_jf(x_j)$.

a) E$=-\frac{69}{32}$; b) E$=\frac{63}{32}$; c) E$=-\frac{63}{16}$; d) E$=\frac{32}{63}$; e) E$=-\frac{32}{69}$; f) E$=\frac{63}{16}$.

2.818B Să se afle aria laterală a conului de volum maxim înscris în sfera de rază R.

a) $\frac{8\pi R^2}{9}$; b) $\frac{4\pi R^2\sqrt{2}}{9}$; c) $\frac{16\pi R^2\sqrt{3}}{9}$; d) $\frac{8\pi R^2\sqrt{3}}{9}$; e) $\frac{8\pi R^2\sqrt{2}}{9}$; f) $\frac{8\pi R^2}{3}$.

2.819B Aflaţi valorile lui m pentru care funcţia $f(x)=\frac{(m-1)e^x-me^{-x}}{1+e^x}$ este monotonă pe tot domeniul său de definiţie.

a) $m\in(-\infty,0)$; b) $m\in(0,\infty)$; c) $m\in(-\infty,0]\cup[1,\infty)$; d) $\mathbb{R}$; e) $(1,\infty)$; f) $\varnothing$.

2.820B Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}$. Atunci

a) f este constantă; b) f este constantă pe porţiuni; c) f este pozitivă; d) f este negativă; e) f este pară; f) Imf este interval.

2.821B Punctele de extrem ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$ sunt

a) $\{-1,0\}$; b) $\{-1,1\}$; c) $\{0\}$; d) $\{1\}$; e) $\{-1,0,1\}$; f) $\varnothing$.

2.822B Se dă funcţia Rolle $f(x)=\sin x$, $x\in[-\pi,3\pi]$. Aplicând teorema Rolle se obţine $c\in(-\pi,3\pi)$, $f'(c)=0$. Atunci

a) $c=\frac{\pi}{2}$; b) $c\in\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\}$; c) $c\in\{\pm\frac{\pi}{2},2\pi\pm\frac{\pi}{2}\}$; d) $c\in\{\pi\pm\frac{\pi}{2}\}$; e) $c\in\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}$; f) $c=-\frac{\pi}{2}$.

2.823B Se consideră funcţia

$$f:[-1,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}x^2+mx+n, & x\in[-1,0)\\ px^2+4x+4, & x\in[0,1],\end{cases}$$

unde m, n, p sunt reali. Să se determine parametrii m, n, p astfel încât funcţiei f să i se poată aplica teorema lui Rolle pe intervalul $[-1\ 1]$.
a) $m=n=-4$, $p=7$; b) $m=1$, $n=3$, $p=6$; c) $m=2$, $n=p=5$;
d) $m=1$, $n=-3$, $p=-6$; e) $m=-2$, $n=p=5$; f) $m=n=4$, $p=-7$.

2.824B Fie ecuaţia $x^3+3x^2-mx+5=0$. Să se determine parametrul real m astfel încât ecuaţia să aibă trei soluţii reale distincte.
a) $m<-1$; b) $m=-9$; c) $m>9$; d) $m\in(0,9)$; e) $m=9$; f) $m\in\mathbb{R}$.

2.825B Să se determine pentru ce valori ale parametrului real m ecuaţia $x^3-x^2-x+m=0$ are trei soluţii reale distincte.
a) $m\in\left(-\frac{1}{3},1\right)$; b) $\varnothing$; c) $m\in(1,\infty)$; d) $m\in\left(-\infty,-\frac{5}{27}\right)$;
e) $m\in\left(-\frac{5}{27},1\right)$; f) $m\in\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$.

2.826C Punctul c din teorema (formula) lui Lagrange în general, nu este unic. Care sunt punctele c pentru funcţia $f(x)=x+\sin x$ pe intervalul $[-2\pi,2\pi]$
a) $\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{3\pi}{4}$; b) $\pm\frac{\pi}{3},\pm\frac{2\pi}{3}$; c) $\pm\frac{\pi}{6},\pm\frac{5\pi}{6}$; d) $\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2}$; e) $\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{5\pi}{4}$; f) $\pm\frac{\pi}{6},\pm\frac{\pi}{3}$.

2.827C Aflaţi $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $2x+\ln x-\lambda(x-\ln x)=0$ să aibă două soluţii reale şi distincte ?
a) $\mathbb{R}$; b) $(-\infty,-1)$; c) $(e,+\infty)$; d) $(-1,2)$; e) $\varnothing$; f) $\left(2,\frac{2e+1}{e-1}\right)$.

2.828C Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-1}{2x^2}+\dfrac{1}{x(e^{2x}-1)}\right)$.
a) ∞; b) 1; c) $\frac{1}{2}$; d) 0; e) nu există; f) $\frac{1}{6}$.

2.829C Fie $f\colon(0,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2}{x^2+2x}$. Să se calculeze

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}[f^{(k)}(1)-f^{(k+1)}(1)].$$

a) $1-\frac{1}{3^{n+2}}$; b) $-\frac{8}{9}+(-1)^n(n+1)!\left(1-\dfrac{1}{3^{n+2}}\right)$; c) $-\frac{8}{9}+(-1)^n\left(1-\frac{1}{3^{n+2}}\right)$;
d) $(-1)^n\left(1-\frac{1}{3^{n+2}}\right)$; e) $(-1)^n\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$; f) $-\frac{8}{9}+(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$.

2.830C Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|(x^2-1)$ are
a) un punct de extrem local; b) două puncte de extrem local; c) trei puncte de extrem local; d) un punct de maxim global; e) nici un punct de extrem local; f) patru puncte de extrem local.

2.831C Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie cu derivata continuă şi injectivă pe $[a,b]$. Dacă se aplică teorema Lagrange funcţiei f pe intervalul $[a,x]$, $x\in(a,b]$, valoarea lui c care se obţine depinde de x şi o notăm cu $c(x)$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to a}c(x)$.
a) $\frac{a+b}{2}$; b) $\sqrt{a^2+b^2}$; c) $\frac{2ab}{a+b}$; d) a; e) b; f) limita nu există.

2.832C Se dau funcţiile $f(x)=x$, $g(x)=\ln(1+x)$, $x>-1$, şi $h(x)=x-\dfrac{1}{2}x^2$. Ce relaţii există între aceste funcţii pentru orice $x>0$?
a) $f<g<h$; b) $f<h<g$; c) $g<f<h$; d) $g<h<f$; e) $h<f<g$; f) $h<g<f$.

2.833C Fie $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Să se calculeze $f^{(n)}(0)$.
a) $(-1)^n n!$; b) 1; c) $n!$; d) $\frac{2}{3}n!$; e) $\frac{1}{2}n!$; f) $(-1)^{n+1}n!$.

2.834C Găsiţi toate funcţiile derivabile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care satisfac

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

a) e^x; b) ax; c) $\ln x$; d) $ax+b$; e) $\sin x$; f) $\cos x$.

2.835C Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, derivabilă, astfel încât $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ şi $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in[0,\infty)$. Să se arate că f este
a) identic nulă; b) strict crescătoare; c) un polinom de gradul n; d) o funcţie trigonometrică; e) o exponenţială; f) un logaritm.

2.836C Se consideră o funcţie continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi o funcţie derivabilă $x:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ astfel încât $x'(t)=f(x(t))-1$, $\forall t\in[0,\infty)$ şi $\ell=\lim\limits_{t\to\infty}x(t)$ există şi este finită, iar $\lim\limits_{t\to\infty}x'(t)=0$. Să se calculeze $f(\ell)$.
a) 1; b) 0; c) -1; d) ∞; e) e; f) 2.

2.837C Pentru ce valori ale parametrului real m ecuaţia $\sin 2x+2\sin x=m$ are două soluţii reale situate în intervalul $(0,2\pi)$?
a) $m\neq 0$; b) $m\in\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; c) $m\in[-2,2]$; d) $m\in\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$;
e) nu există; f) $m\in\mathbb{R}$.

2.838C Funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ este continuă, strict crescătoare şi are asimptota orizontală $y=a$. Funcţia $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ este continuă, strict descrescătoare şi are asimptota orizontală $y=b$. Ştiind că $a>b$, precizaţi numărul n de rădăcini ale ecuaţiei $f(x)=g(x)$, $x\in(0,\infty)$.
a) $n=0$; b) $n=0$ sau $n=1$; c) o infinitate; d) $n=3$; e) $n=4$; f) $n=1$.

2.839C Se dă ecuaţia $x^2-2\ln x+m=0$, unde m este un parametru real. Să se determine m astfel încât ecuaţia să aibă două rădăcini reale.

a) $m \in (-\infty, 1)$; b) $m \in (-1, \infty)$; c) $m = -1$;
d) $m \in (-\infty, -1)$; e) $m \in (-1, 1)$; f) $m \in \varnothing$.

2.840C Fie $f : \mathbb{R}\setminus\{-1, 0\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$. Fie n numărul punctelor de extrem şi m numărul punctelor de inflexiune ale funcţiei f. Atunci
a) $n \geq 1$; b) $m \geq 2$; c) $n = 1$; d) $n = 0, m = 1$; e) $m \geq 3, n = 2$; f) $m = n = 0$.

2.841C Să se determine mulţimea punctelor $(m, n) \in \mathbb{R}^2$ pentru care ecuaţia $x^3 - 3x + m^2 + n^2 - 7 = 0$ are trei rădăcini reale distincte.
a) $\{(m,n) | 4 < m^2 + n^2 < 6\}$; b) $\varnothing$; c) $\mathbb{R}^2$; d) $\{(m,n) | m^2 + n^2 = 8\}$;
e) $\{m, n | m^2 + n^2 < 5\}$; f) $\{(m,n) | 5 < m^2 + n^2 < 9\}$.

2.842C Fie $f(x) = \dfrac{e^{|x|}}{x+1}$, $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$, fie mulţimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x \text{ este abscisa unui punct de extrem local al funcţiei} f\}$$

şi $B = f(A)$. Care din următoarele afirmaţii este corectă ?
a) $A = \{0\}$; b) $A = \varnothing$; c) $A = \{-2\}$; d) $B = \{e^{-2}, 0\}$; e) $B = \{-e^2\}$;
f) $B = \{-e^2, 1\}$.

2.843C Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + 1}{\sqrt{x^2+1}}$, $a \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $S = \sum\limits_{a \in A} a$, unde $A = \{a \in \mathbb{R} \mid f(\mathbb{R}) = [0, \infty)\}$.
a) $S = 1$; b) $S = 0$; c) $S = -1$; d) $S = 2$; e) $S = -2$; f) $A = \varnothing$.

2.6 Grafice de funcţii

2.844A Să se determine punctele $M(x_0, y_0)$ în care funcţiile $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = \ln(x+1)$, $x \in (0, \infty)$ sunt tangente.
a) $M(0,1)$; b) $M(0,0)$; c) $M(-1,0)$; d) $M(e,e)$; e) $M(-1,1)$; f) $M(1,1)$.

2.845A Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x-1}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul lui f să treacă prin punctul $(2, 8)$, iar tangenta la grafic în punctul $x = 2$ să fie paralelă cu dreapta $y = -3x + 1$.
a) $a = b = 1$; b) $a = b = 2$; c) $a = 1, b = 2$; d) $a = 2, b = 1$; e) $a = 1, b = 3$;
f) nu există astfel de valori.

2.846A Fie $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$. Ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul corespunzător lui $x = 2$ este

a) $y - 1 = \dfrac{3}{\sqrt{5}}(x-2)$; b) $y - \sqrt{5} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}(x-2)$; c) $y - 2 = 3(x-2)$; d) $y = x$;
e) $y + \sqrt{5} = 2(x-2)$; f) $y - \sqrt{5} = -\dfrac{3}{\sqrt{5}}(x-2)$.

2.847A Fie curba de ecuaţie $y = 2x^3 + 4x$. Aflaţi valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ ştiind că dreapta de ecuaţie $y = mx + 4$ este tangentă la curbă.
a) $m = 2$; b) $m = -1$; c) $m = 10$; d) $m = 8$; e) $m = -6$; f) $m = 12$.

2.848A Să se determine abscisele punctelor de pe graficul funcţiei $y = x + \sin x$, $x \in [-\pi, \pi]$, unde tangentele la grafic sunt paralele cu dreapta $y = \sqrt{3}x$.
a) $\pm\frac{\pi}{6}$; b) $\pm\frac{\pi}{4}$; c) $\pm\frac{\pi}{3}$; d) $\pm\arccos(\sqrt{3} - 1)$; e) $\pm\arccos(\sqrt{2} - 1)$;
f) $\pm\arccos(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})$.

2.849A Tangenta la curba $y = x^2 - x$ în punctul $A(1, 0)$ are ecuaţia
a) $y = -x + 1$; b) $y = x - 1$; c) $y = x + 2$; d) $y = -x - 1$; e) $y = -x + 2$;
f) $y = -x - 1$.

2.850A Se consideră semicercul $y = \sqrt{4 - (x-1)^2}$, $x \in [-1, 3]$, şi punctele de abscise $1 - a$, $1 + a$ unde tangentele la semicerc sunt paralele cu prima bisectoare $y = x$ şi respectiv cu a doua bisectoare $y = -x$. Atunci $a \in \mathbb{R}$ are valoarea:
a) 1; b) -1; c) $\sqrt{2}$; d) $-\sqrt{2}$; e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.851A Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{e}, 0, \frac{1}{e}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left|\frac{\ln|x|}{1 + \ln|x|}\right|$. Să se precizeze care dintre afirmaţiile următoare referitoare la funcţia f este adevărată:
a) $x = \pm 1$ sunt asimptote verticale; b) $x = 0$ este punct unghiular, $x = \pm\frac{1}{e}$ sunt asimptote verticale; c) $x = \pm 1$ sunt puncte unghiulare, $x = 0$ este asimptotă verticală; d) $x = \pm 1$ sunt puncte unghiulare, $x = 0$ este punct de întoarcere, $x = \pm\frac{1}{e}$ sunt asimptote verticale; e) $x = \pm 1$ sunt puncte unghiulare; f) $x = \pm\frac{1}{e}$ sunt asimptote orizontale.

2.852A Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, şi $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$. Să se precizeze care dintre afirmaţiile următoare este adevărată:
a) $x = 0$ este punct de extrem pentru f şi g; b) f şi g sunt pare, iar $x = 0$ este asimptotă verticală pentru ambele; c) $y = 1$ este asimptotă orizontală pentru ambele, iar $x = 0$ este asimptotă verticală pentru g şi punct de minim pentru f; d) $x = 0$ este punct de maxim pentru f şi de minim pentru g; e) f şi g sunt impare; f) f şi g admit asimptote oblice.

2.853A Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$. Atunci

a) f este convexă şi $x=\frac{1}{e}$ este punct de minim; b) f este concavă şi $x=\frac{1}{e}$ este punct de minim; c) f este crescătoare; d) f este descrescătoare; e) f este convexă şi $x=\frac{1}{e}$ este punct de maxim; f) $x=\frac{1}{e}$ este punct de inflexiune.

2.854A Asimptotele funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\operatorname{arctg}x$, sunt

a) $y=\pm\frac{\pi}{2}$ asimptote orizontale; b) $y=\pm\frac{\pi}{2}$ asimptote verticale;
c) $y=\pm\frac{\pi}{2}x-1$ asimptote oblice; d) $y=-x\pm\frac{\pi}{2}$ asimptote oblice;
e) $y=x$ asimptotă oblică; f) $y=-x$ asimptotă oblică.

2.855A Punctele de inflexiune ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1+x^2)e^{-x^2}$, sunt

a) ±1; b) ±2; c) $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$; d) 0; e) $\pm\sqrt{2}$; f) nu are.

2.856A Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{2}+\operatorname{arctg}x$. Atunci

a) f este pară; b) f este descrescătoare; c) f este convexă; d) f este concavă; e) f are un punct de inflexiune; f) f admite un punct de extrem.

2.857A Se dă ecuaţia $\frac{|\ln x|}{x}=m$, unde m este un parametru real. Atunci

a) ecuaţia are soluţii pentru orice $m\in\mathbb{R}$; b) dacă $m=0$ ecuaţia nu are soluţii; c) pentru $m>\frac{1}{e}$ ecuaţia are două soluţii; d) pentru $m=\frac{1}{e}$ ecuaţia nu are soluţii; e) pentru $0<m<\frac{1}{e}$ ecuaţia are trei soluţii; f) ecuaţia nu are soluţii, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

2.858A Să se determine parametrii $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia

$$f:(-\infty,-1)\cup(1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2+ax+b}{\sqrt{x^2-1}},$$

admite asimptota oblică $y=x+1$, iar $x=2$ este punct de extrem.

a) $a=b=1$; b) $a=1$, $b=\frac{3}{2}$; c) $a=\sqrt{2}$, $b=3\sqrt{2}$; d) $a=2$, $b=\frac{3}{2}$; e) $a=\frac{3}{2}$, $b=1$; f) $a=\frac{1}{2}$, $b=1$.

2.859A Se consideră ecuaţia $x+\sqrt{x^2+2x}=m$, unde m este un parametru real. Atunci

a) ecuaţia are soluţii pentru orice $m\in\mathbb{R}$; b) ecuaţia nu are soluţii pentru nici o valoare a lui m; c) pentru $m\in[-2,-1)$ ecuaţia are două soluţii; d) pentru $m\geq0$ ecuaţia are două soluţii; e) pentru $m\in[-1,0)$ ecuaţia are soluţii; f) pentru $m\in[-2,-1)\cup[0,\infty)$ ecuaţia are soluţii.

2.860A Se consideră ecuaţia $\frac{x}{2}+\operatorname{arctg}x=m$, unde m este un parametru real. Atunci

a) ecuaţia are două soluţii pentru orice $m\in\mathbb{R}$; b) ecuaţia nu are soluţii pentru nici o valoare a lui m; c) pentru $m<0$ ecuaţia are o soluţie pozitivă; d) pentru $m>0$ ecuaţia are o soluţie negativă; e) ecuaţia are soluţii pentru orice $m\in\mathbb{R}$; f) pentru $m=0$ ecuaţia are două soluţii.

2.861A Să se determine parametrii reali $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{ax^2+b}{x-1}$, are tangenta la grafic, în $x=2$, dreapta $y=-2x+13$.

a) $a=\frac{7}{4}$, $b=2$; b) $a=\frac{5}{4}$, $b=1$; c) $a=2$, $b=\frac{7}{4}$; d) $a=1$, $b=\frac{5}{4}$; e) $a=-1$, $b=\frac{7}{4}$; f) $a=b=\frac{7}{4}$.

2.862A Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$. Avem:

a) $x=0$ punct unghiular, $y=\pi$ asimptotă orizontală; b) $x=0$ punct de întoarcere, $y=\pi$ asimptotă orizontală; c) $x=\pi$ punct unghiular, $y=0$ asimptotă orizontală; d) f este descrescătoare pe $(0,\infty)$; e) $x=0$ punct unghiular, $y=-\pi$ asimptotă orizontală; f) f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2.863A Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale funcţiei

$$f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x}{1-x^2}.$$

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4; f) funcţia este convexă.

2.864A Fie $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\ln(1+x)$. Decideţi:

a) f este descrescătoare pe $(-1,\infty)$; b) f este crescătoare pe $(0,\infty)$; c) f este crescătoare pe $(-1,\infty)$; d) f nu este crescătoare pe nici un interval; e) f admite un maxim local; f) f admite două puncte de extrem local.

2.865A Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$. Atunci

a) f este crescătoare; b) f este descrescătoare; c) f descreşte pe $(0,1)$; d) f creşte pe orice interval care nu conţine 0; e) f creşte pe $(0,+\infty)$ şi descreşte pe $(-\infty,0)$; f) $f(0)=1$.

2.866A Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$. Atunci

a) f este crescătoare pe domeniul de definiţie; b) f este descrescătoare pe domeniul de definiţie; c) f este crescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty,1)$ şi $(1,\infty)$; d) f este descrescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty,1)$ şi $(1,\infty)$; e) f este crescătoare pe $(-\infty,1)$ şi descrescătoare pe $(1,\infty)$; f) f este descrescătoare pe $(-\infty,1)$ şi crescătoare pe $(1,\infty)$.

2.867A Se dă funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-\ln x$. Să se determine intervalul pe care funcţia este strict crescătoare.

a) $(0,\infty)$; b) $(1/2,\infty)$; c) $(1,\infty)$; d) $[1,\infty)$; e) $[0,1)$; f) $(2,\infty)$.

2.868A Să se determine intervalele pe care funcţia
$$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^{(x^2+1)/x}$$
este strict descrescătoare.

a) $(-\infty,0)$; b) $(-\infty,\frac{-1-\sqrt{5}}{2})$; c) $(-\infty,\frac{-1-\sqrt{5}}{2})$ şi $(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$;
d) $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},0)$ şi $(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$; e) $(-\infty,\frac{-1-\sqrt{5}}{2})$ şi $(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\infty)$; f) $(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$.

2.869A Să se determine mulţimea valorilor funcţiei
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}.$$
a) $[-1;4]$; b) $[-3,0]$; c) $[4,\frac{15}{2})$; d) $[-\frac{1}{3},5]$; e) $[5,\frac{25}{2}]$; f) $(0,\frac{17}{2}]$.

2.870A Fie $f:[1,\sqrt{e})\to I$, $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$. Găsiţi pe I astfel încât funcţia f să fie inversabilă.

a) $I=[0,\frac{1}{2e})$; b) $I=(e,2e)$; c) $I=(\frac{1}{2e},e)$; d) $I=(0,1)$; e) $I=[1,2]$; f) $I=[2,3]$.

2.871A Abscisele punctelor de extrem ale funcţiei $f(x)=x^3-3x$ sunt
a) $\{3\}$; b) $\{0,\pm\sqrt{3}\}$; c) $\{0,\pm1\}$; d) $\{\pm1\}$; e) $\{\pm1,\pm\sqrt{3},0\}$; f) $\{\pm1,\pm\sqrt{3}\}$.

2.872A Mulţimea maximală pe care funcţia $f(x)=1+\frac{1}{x}$ este convexă, este
a) $(-\infty,1)$; b) $(0,\infty)$; c) $(1,\infty)$; d) $(-\infty,0)$; e) f este concavă ; f) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2.873A Să se determine asimptotele funcţiei $f(x)=\sqrt{\frac{x^6+x}{x^4+1}}$.

a) $y=x+1$; b) $x=1,x=-1$; c) nu are asimptote; d) $x=-1,y=0$;
e) $y=0$; f) $y=x$ spre ∞ şi $y=-x$ spre $-\infty$.

2.874A Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{ax^2+1}{x^2+b^2}$. Să se găsească toate perechile (a,b) astfel încât graficul funcţiei să treacă prin punctul $(1,1)$, iar valoarea minimă a funcţiei să fie $\frac{1}{4}$.

a) $(1,1)$; b) $(1,2),(1,-2)$; c) $(4,2),(4,-2)$; d) $(1,4),(-1,4)$; e) $(0,1),(0,2)$;
f) $(2,2),(2,-2)$.

2.875A Graficele funcţiilor $f,g:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$, $g(x)=x^2+x$ admit în acelaşi punct x_0, aceeaşi tangentă. Care este punctul x_0 şi care este ecuaţia tangentei?

a) $x_0=1,y=x$; b) $x_0=1,y=x+1$; c) $x_0=1,y=-x$; d) $x_0=0,y=x$;
e) $x_0=0,y=-x$; f) $x_0=0,y=x+1$.

2.876A Să se determine m astfel încât graficele funcţiilor $f(x)=x^2-4x+3$ şi $g(x)=2x^2-2(m+3)x+m^2$ să fie tangente.

a) $m=-1$; b) $m=0$; c) $m=-2$; d) $m\in\{-2,0\}$; e) $m=1$; f) $m\in\varnothing$.

2.877A Câte asimptote are funcţia $f(x)=\frac{x^6}{(x^2-1)(x^2+1)(x^2-4x+3)}$?

a) 5; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4; f) nu are asimptote.

2.878A Fie $a\in\mathbb{R}$ şi fie $f:D\mapsto\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{ax^3+x^2}{x^2+a}$, unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei f. Determinaţi mulţimea $A=\{a\in\mathbb{R}|$ graficul funcţiei f are asimptote oblice şi verticale $\}$.

a) $A=(-\infty,-1]$; b) $A=\varnothing$; c) $A=(0,\infty)$; d) $A=(-\infty,-1)$;
e) $A=(-\infty,0]$; f) $A=(-\infty,0)$.

2.879A Fie funcţia $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ şi n numărul punctelor sale de inflexiune. Atunci

a) $n=3$; b) $n=4$; c) $n=5$; d) $n=5$; e) $n=6$; f) $n=1$

2.880B Fie funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$. Care din următoarele aserţiuni relativ la punctul $x_0=1$ este adevărată ?

a) este punct de întoarcere; b) este punct de inflexiune; c) este punct critic;
d) este punct unghiular; e) este punct de discontinuitate;
f) un punct în care tangenta la graficul lui f este paralelă cu axa Ox.

2.881B Să se determine o funcţie de forma $f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ astfel încât tangenta la grafic în punctul de abscisă $x=1$ să fie paralelă cu prima bisectoare şi graficul ei să admită dreptele $y=3$ şi $x=-1$ ca asimptote.

a) $f(x)=3\frac{x-1}{x+1}$; b) $f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$; c) $f(x)=\frac{3x}{x+1}$; d) $f(x)=3\frac{x-2}{x+1}$;
e) $f(x)=3\frac{x+2}{x+1}$; f) problema nu are soluţie.

2.882B Fie $f:(-\infty,-1)\cup[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}}$, $a,b\in\mathbb{R}$. Ştiind că dreapta de ecuaţie $y=-x+1$ este asimptotă oblică spre $-\infty$, determinaţi valoarea lui $\lambda=m+n$ dacă $y=mx+n$ este ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$.

a) $\lambda=0$; b) $\lambda=-1$; c) $\lambda=1$; d) $\lambda=2$; e) $\lambda=3$; f) $\lambda=4$.

2.883B Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{ax^2+bx}$, unde D este domeniul maxim de definiţie, iar $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul lui f trece prin punctul $M(1,1)$ şi în acest punct panta tangentei la grafic este $\frac{1}{2}$. Decideţi:

a) $a = b = 1$; b) $a = -1$, $b = 3$; c) $a = 4$, $b = -2$; d) $a = -2$, $b = 4$; e) $a = 2$, $b = 0$; f) nu există $a, b \in \mathbb{R}$ cu această proprietate.

2.884B Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3+3}{x}$. Tangenta la graficul lui f în punctul M de abscisă -2 taie a doua oară graficul funcţiei în punctul P. Panta tangentei la grafic în P este

a) $-\frac{41}{6}$; b) $-\frac{5}{3}$; c) -1; d) $\frac{29}{4}$; e) $\frac{31}{4}$; f) $-\frac{25}{6}$.

2.885B Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$. Dacă $M = \{x_0 \in (0,\infty) \mid$ dreapta tangentă la graficul lui f în punctul de abscisă x_0 trece prin $A(2,1)\}$ şi $S = \sum\limits_{x_0 \in M} x_0$, atunci

a) $M = \varnothing$; b) $S \in [1,2)$; c) $S \in (2,3)$; d) $S \in (3,4)$; e) $S \in (4,5)$; f) $S > 4$.

2.886B Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şi $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1 - \dfrac{1}{ax}$. Fie A mulţimea acelor $a \neq 0$ pentru care graficele celor două funcţii admit o tangentă comună într-un punct comun. Atunci

a) $A = \{-\frac{1}{3}, 1\}$; b) $A = \{-1, \frac{1}{2}\}$; c) $A = \{-2, -3\}$;
d) $A = \{-\frac{27}{5}, 1\}$; e) $A = \{-\frac{17}{5}, 1\}$; f) $A = \varnothing$.

2.887B Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. Decideţi:

a) graficul lui f admite asimptote oblice; b) graficul lui f nu admite nici un fel de asimptote; c) există un unic punct de inflexiune; d) graficul are cel puţin un punct de extrem; e) graficul are cel puţin două puncte de extrem; f) f este crescătoare.

2.888B Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\sqrt{x^2+bx}$, unde D este domeniul maxim de definiţie. Fie M mulţimea perechilor $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pentru care dreapta $y = 2x + 3$ este asimptotă oblică a lui f. Să se determine $S = \sum\limits_{(a,b)\in M} (a+b)$.

a) $S = 5$; b) $S = 6$; c) $S = 4$; d) $S = -1$; e) $S = 7$; f) $M = \varnothing$.

2.889B Fie şirul de funcţii

$$f_n : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R},\ n \geq 1,\ f_n(x) = \frac{(x^{2n}+1)(\sqrt{x^2+x+1} - x)}{x^{2n} + x}$$

şi $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, unde D este domeniul maxim de definiţie al lui f. Decideţi:

a) f nu admite asimptote oblice; b) f admite toate cele trei tipuri de asimptote; c) f admite exact două asimptote; d) f nu admite asimptote orizontale; e) f nu admite asimptote verticale; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

2.890B Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} |x|^x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. Atunci

a) f este crescătoare; b) f este convexă pe $(-\infty, 0)$; c) f admite două puncte de extrem; d) f admite trei puncte de extrem; e) f este concavă pe $(-\infty, 0)$; f) f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2.891B Pentru funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |4x^3 - 3x + 1|$, punctele $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{1}{2}$ sunt

a) x_1 punct unghiular, $x_2 = -\frac{1}{2}$ punct de maxim, $x_3 = \frac{1}{2}$ punct de minim; b) x_1 punct de întoarcere x_2, x_3 puncte de extrem; c) x_1 punct de inflexiune, x_2, x_3 puncte de extrem; x_1 punct ordinar, x_2, x_3 puncte de extrem; d) x_1 punct de maxim, x_2, x_3 puncte de inflexiune; e) $x = -1$ asimptotă verticală, x_2, x_3 puncte de extrem; f) afirmaţiile precedente sunt toate false.

2.892B Să se determine mulţimea A a valorilor funcţiei $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^{1/x}, & x > 0. \end{cases}$

a) $A = [0, e^{\frac{1}{e}}]$; b) $A = [0,1]$; c) $A = [0, e]$; d) $A = [0, e^{-e}]$; e) $A = [\frac{1}{e}, e]$; f) $[0, \frac{1}{e}]$.

2.893B Să se determine asimptotele oblice ale curbei $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}\ln(1 + |x|)$.

a) nu există; b) $y = x + 1$; c) $y = \frac{x}{2}$ spre $\pm\infty$; d) $y = \frac{x}{2} + 1$; e) $y = x - 1$; f) $y = -\frac{x}{2}$ spre $\pm\infty$.

2.894B Fie $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ şi $g(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Atunci

a) $f < g$; b) $f \geq g$; c) $f \leq g$; d) $f > g$; e) $f + g$ se anulează cel puţin o dată; f) $f''(0) \neq g''(0)$.

2.895B Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \dfrac{8}{x}$. Determinaţi intervalul pe care f este concavă.

a) $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$; b) $[-2, 0)$; c) $(0, \sqrt[3]{4})$; d) $(\sqrt[3]{4}, \infty)$; e) $(-\infty, -2)$; f) $(0, \infty)$.

2.896B Să se determine mulţimea maximală la care restricţia funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x+2| - x}$ este inversabilă şi să se determine inversa ei.

a) $(-\infty,-2]$, $f^{-1}(x)=-1-\frac{1}{2}x^2$; b) $(-\infty,-2]$, $f^{-1}(x)=1-\frac{1}{2}x^2$;
c) $(-\infty,-2]$, $f^{-1}(x)=-1+\frac{1}{2}x^2$; d) $(-\infty,-1]$, $f^{-1}(x)=-1-\frac{1}{2}x^2$;
e) $(-\infty,-1]$, $f^{-1}(x)=1-\frac{1}{2}x^2$; f) $(-\infty,-1]$, $f^{-1}(x)=-1+\frac{1}{2}x^2$.

2.897B Intervalele de convexitate ale funcţiei $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sin^2\frac{x}{2}$ sunt

a) $[0,\frac{\pi}{2}]$; b) $[0,\pi]$; c) $[0,2\pi]$; d) $[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3\pi}{2},2\pi]$; e) $[\frac{3\pi}{2},2\pi\,]$; f) $[\pi,2\pi]$.

2.898B Să se determine $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{\alpha x^3+\beta x^2}$ să admită asimptota oblică $y=2x-\dfrac{1}{6}$.

a) 1 şi 0; b) 1 şi 2; c) 8 şi -2; d) -1 şi 2; e) 2 şi -2; f) 1 şi 1.

2.899B Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{me^x-(m+1)e^{-x}}{e^x-1}$. Să se afle valorile $m\in\mathbb{R}$ pentru care graficul funcţiei f intersectează axa Ox.

a) $m\in(0,\infty)$; b) $m\in(-\infty,-1)$; c) $m\in(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$; d) $m\in\mathbb{R}$;
e) $m\in(-1,0)$; f) $m\in(-1,1)$.

2.900B Fie $f(x)=x+\dfrac{\ln x}{x}$, $x>0$, n numărul asimptotelor la graficul lui f şi m numărul punctelor de extrem ale lui f. Atunci

a) $n=0,m=1$; b) $n=1,m=0$; c) $n=2,m=0$; d) $n=1,m=1$;
e) $n=2,m=2$; f) $n=0,m=0$.

2.901B Fie $f,g:D\to\mathbb{R}, D\subset\mathbb{R}$, două funcţii derivabile, mulţimile $A=\{\alpha|\alpha\in D,f(\alpha)=g(\alpha)\}$, $B=\{\alpha|\alpha\in D,f'(\alpha)=g'(\alpha)\}$, $C=A\cap B$ şi propoziţiile:

(P_1) Graficele funcţiilor f şi g se intersectează în puncte de abscisă $\alpha\in A$.
(P_2) Graficele funcţiilor f şi g se intersectează în puncte de abscisă $\alpha\in B$.
(P_3) Tangentele la graficele funcţiilor f şi g coincid în punctele de abscisă $\alpha\in C$.

Despre cele trei propoziţii se poate afirma

a) toate trei sunt adevărate; b) toate trei sunt false;
c) (P_1) şi (P_2) adevărate, (P_3) falsă; d) (P_1) şi (P_3) adevărate, (P_2) falsă;
e) (P_2) şi (P_3) adevărate, (P_1) falsă; f) (P_3) adevărată, (P_1) şi (P_2) false.

2.902B Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{1+x^2}}$. Atunci

a) f nu are asimptote; b) f are trei asimptote; c) f are numai asimptote verticale sau orizontale; d) f are asimptote oblice şi asimptote verticale; e) f are numai asimptote oblice; f) f are asimptote verticale.

2.903B Să se determine asimptotele funcţiei

$$f(x)=x-x^2\ln\frac{1+x}{x},x\in(-\infty,-1)\cup(0,\infty).$$

a) $y=\frac{1}{2}$; b) $y=2,x=-1$; c) $y=\frac{1}{2},x=-1,x=0$; d) $y=2,x=-1,x=0$;
e) $y=\frac{1}{2},x=-1$; f) $y=-\frac{1}{2},x=-1$.

2.904B Asimptotele funcţiei $f:\mathbb{R}\backslash\{0,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x(x-1)}$ sunt

a) $x=0,x=1$; b) $x=0,x=1,y=1$; c) $x=1,y=1$; d) $x=0,y=1$;
e) $y=1$; f) $x=1$.

2.905B Fie $f:(-\infty,-3)\cup[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x+\sqrt{\dfrac{x^3}{x+3}}$. Atunci

a) f admite numai asimptote verticale şi oblice; b) f admite o asimptotă oblică, o asimptotă verticală şi o asimptotă orizontală; c) f nu admite asimptote; d) f admite numai asimptote orizontale şi oblice; e) f admite 2 asimptote; f) admite patru asimptote.

2.906C Pe graficul funcţiei $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x>0$, să se determine un punct $A(a,b)$ în care tangenta să fie paralelă cu dreapta ce trece prin punctele $M(1,1)$ şi $N(2,1/2)$.

a) $A(\sqrt{2},-\sqrt{2})$; b) $A(1/2,2)$; c) $A\left(\sqrt{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; d) $A\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; e) $A\left(\frac{5}{4},\frac{4}{5}\right)$;
f) $A\left(\frac{6}{5},\frac{2}{6}\right)$.

2.907C Fie $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,1]\\ ax-1, & x\in(1,2]\end{cases}$. Decideţi:

a) f injectivă $\Leftrightarrow$ f este strict monotonă; b) f continuă pe $[0,2]\Leftrightarrow f$ injectivă; c) f injectivă $\Leftrightarrow a\geq 2$; d) $f([0,2])=[0,2]\Rightarrow f$ nu este injectivă; e) f injectivă $\Rightarrow f([0,2])$ este interval închis; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

2.908C Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\ \mathrm{arctg}\,x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$. Să se calculeze $\mathrm{Im}\,f$.

a) $(-\pi,\pi)$; b) $[-\pi,\pi]$; c) $\{-\pi,\pi\}$; d) $\mathbb{R}$; e) $[-1,1]$; f) $(-1,1)$.

2.909C Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^\alpha-\alpha x+\alpha-1$. Pentru ce $\alpha\in\mathbb{R}$ avem $f(x)\geq 0$ oricare ar fi $x>0$?

a) $\alpha\in(-\infty,0]\cup[1,\infty)$; b) $\alpha>1$; c) $\alpha<0$; d) $\alpha=2$; e) $\alpha>2$; f) nu există.

2.910C Fie $f(x)=e^x+mx^3, x\in\mathbb{R}$ şi

$$A=\{m\in\mathbb{R}|f \text{ are cel puţin un punct de inflexiune }\}.$$

Atunci

a) $A=\varnothing$; b) $A=\mathbb{R}$; c) $A=(0,+\infty)$; d) $A=\left(-\infty,-\frac{e}{6}\right)\cup(0,+\infty)$; e) $A=(1,2)$; f) $A=\left(-\frac{e}{6},0\right]$.

2.911C Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}, n>1$, considerăm funcţia

$$f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin^n x.$$

Există un punct $x_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât f este convexă pe $(0,x_n)$ şi concavă pe $(x_n,\frac{\pi}{2})$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$.

a) $0,0$; b) $0,\frac{1}{2}$; c) $\frac{\pi}{4},\frac{1}{e}$; d) $\frac{\pi}{4},\frac{1}{\sqrt{e}}$; e) $\frac{\pi}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}$; f) $\frac{\pi}{2},1$.

2.912C Să se determine punctele de inflexiune ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=(1+x)\,e^{-|1-x|}.$$

a) $x=1$; b) $x=-1$; c) $x=2$; d) nu există; e) $x=-3$; f) $x\in\{-3,1\}$.

2.913C Fie $f(x)=\min\left(\ln|x|, e^{x+1}-1\right)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Să se afle intervalele maximale pe care funcţia este convexă.

a) $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$; b) $(-1,0)\cup(0,\infty)$; c) $(0,\infty)$; d) $(-\infty,-1]$; e) nu există; f) $(-1,0)$.

2.914C Aflaţi cea mai mică constantă λ astfel încât $\ln(1+e^t)<\lambda+t$, $\forall t\in(0,\infty)$.

a) $\lambda=\ln 2$; b) $\lambda=1$; c) $\lambda=2$; d) $\lambda=\ln 3$; e) $\lambda=-\ln 2$; f) $\lambda=3$.

2.915C Fie $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, şi fie $x_k\in\mathbb{R}$ valoarea lui x din intervalul $[(2k\pi+\frac{3\pi}{2})^{-1},(2k\pi+\frac{\pi}{2})^{-1}]$, $k\in\mathbb{Z}$, pentru care are loc formula lui Lagrange. Fie $l=\lim\limits_{k\to\infty}f'(x_k)$. Atunci

a) $l=2$; b) $l=\frac{1}{\pi}$; c) $l=\frac{2}{\pi}$; d) $l=\frac{4}{\pi}$; e) $l=4$; f) $l=\frac{8}{\pi}$.

2.916C Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.

Domeniul pe care f este convexă este

a) $(-\infty,\frac{1}{2})$; b) $(-\frac{1}{2},\infty)$; c) $(0,\frac{1}{2})$; d) $(-\frac{1}{2},0)\cup(0,\infty)$; e) $(-\infty,-1)\cup(-1,\frac{1}{2})$; f) $(-\frac{1}{2},0)$.

2.917C Să se determine punctele de inflexiune ale funcţiei

$$f(x)=\int_1^x(3\ln t+t^2-5t-3-e^2+5e)\,dt$$

a) 1 şi e; b) 1 şi $\frac{3}{2}$; c) 1; d) funcţia nu are puncte de inflexiune; e) e; f) e şi 2e.

2.918C Fie funcţia $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(e^{2x}-4e^x+3\right)$, unde D este domeniul maxim de definiţie. Fie n numărul asimptotelor la graficul lui f şi m numărul soluţiilor ecuaţiei $f(x)=0$. Atunci

a) $n=3,\ m=2$; b) $n=1,\ m=2$; c) $n=3,\ m=1$; d) $n=1,\ m=1$; e) $n=0,\ m=2$; f) $n=2,\ m=2$.

2.919C Să se determine asimptotele funcţiei $f(x)=\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}$.

a) $x=-2, y=0$; b) $x=-2, y=-1$; c) $y=0, y=-1$; d) $y=-1$; e) $x=-2, y=1$; f) $y=1, y=0$.

2.920C Pentru orice $a\in\mathbb{R}$, considerăm funcţia $f:D\mapsto\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-a}$, unde D este domeniul maxim de definiţie. Care afirmaţie este adevărată ?

a) $D=\mathbb{R}$, $\forall a\in\mathbb{R}$; b) f are două extreme locale dacă şi numai dacă $a>1$; c) dacă $a\in(0,1)$, atunci f este strict crescătoare; d) dacă $a<0$, atunci f nu are extreme locale; e) graficul funcţiei f are asimptote oblice şi verticale pentru orice $a\in\mathbb{R}$; f) f este strict crescătoare pentru orice $a>1$.

2.7 Primitive

2.921A Să se determine $F(x)=\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^4 x}$.

a) $F(x)=\operatorname{tg}x+\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C$; b) $F(x)=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C$; c) $F(x)=\operatorname{tg}x+\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}$; d) $F(x)=\operatorname{ctg}x+\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+C$; e) $F(x)=\operatorname{tg}x+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C$; f) $F(x)=\operatorname{tg}x-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C$.

2.922A Primitivele funcţiei $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^2 x}$ sunt:

a) $F(x)=\frac{1}{\ln^2 x}$; b) $F(x)=-\frac{1}{\ln x}+C$; c) $F(x)=\frac{1}{x^2}+C$; d) $F(x)=\ln^2 x+C$; e) $F(x)=-\frac{1}{\ln^2 x}$; f) $F(x)=\frac{\ln x}{x}$.

2.923A Să se calculeze $\displaystyle\int\frac{dx}{1-\cos x}$.

a) $-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C$; b) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+x$; c) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$; d) $-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$; e) $\operatorname{tg}^2 x+C$; f) $-\operatorname{ctg}^2 x+C$.

2.924A Primitivele $F(x)=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{e^{-2x}+1}}$ sunt

a) $\ln\sqrt{1+e^{2x}}+C$; b) $\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})+C$; c) $\sqrt{e^{2x}+1}+C$; d) $\sqrt{e^{-2x}+1}+C$; e) $(1+e^x)^2+C$; f) $(1+e^{-x})^2+C$.

2.925A Calculaţi integrala nedefinită $\int x^3\sqrt{x^2+1}\ \mathrm{d}x$.

a) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}-\sqrt{x^2+1}+C$; b) $\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}+C$; c) $\frac{1}{5}\sqrt{(x^2+1)^5}-\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$; d) $x\sqrt{x^2+1}+C$; e) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$; f) $\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}+C$.

2.926A Să se determine primitivele $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

a) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$; b) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$; c) $\frac{\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})}{2}+C$; d) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$; e) $\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}+C$; f) $x+\sqrt{x^2+1}+C$.

2.927A Care sunt valorile primitivei $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}$, $x>0$.

a) $2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C$; b) $\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}+C$; c) $\sqrt{1+x+x^2}+C$; d) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}+C$; e) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}+C$; f) $\sqrt{1+x}+C$.

2.928A Una din primitivele $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ este

a) $\frac{x}{1+x^2}$; b) $(x\operatorname{arctg} x)^2$; c) $\frac{x\operatorname{arctg} x}{2}$; d) $\frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{3}$; e) $\frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{3}$; f) $x\operatorname{arctg} x$.

2.929A Fie $F(x)=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+4\cos^2 x}$. Atunci

a) $F(x)=\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{tg} x}{2})+C$; b) $F(x)=2x+C$; c) $F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{tg} x}{2})+C$; d) $F(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+C$; e) $F(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}+C$; f) $F(x)=\operatorname{tg} x$.

2.930A Primitivele $F(x)=\int \frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$ sunt

a) $-\frac{1}{\arcsin x}+C$; b) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$; c) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$; d) $\sin x+C$; e) $\cos x+C$; f) $\operatorname{tg} x+C$.

2.931A Să se calculeze $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$ $(x>0)$.

a) $\ln\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+C$; b) $\ln\sqrt{1+x^2}+C$; c) $-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)+C$; d) $\frac{\ln(1+x^2)}{x}+C$; e) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$; f) $\ln(-x+\sqrt{1-x^2})+C$.

2.932A Să se calculeze $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$, $x>0$.

a) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C$; b) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$; c) $\sqrt{(x^2+1)^3}+C$; d) $\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}+C$; e) $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}+C$; f) $x+\sqrt{x^2+1}+C$.

2.933A Determinaţi primitivele $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$.

a) $\frac{1}{1+x}+C$; b) $\frac{\sqrt{x}}{1+x}+C$; c) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$; d) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}}+C$; e) $\operatorname{arctg} x+C$; f) $\frac{1}{1+\sqrt{x}}+C$.

2.934A Aflaţi primitivele $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

a) $x+\operatorname{tg} x+C$; b) $x+\operatorname{ctg} x+C$; c) $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$; d) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x+C$; e) $\frac{1}{\cos^2 x}+C$; f) $\frac{1}{\sin^2 x}+C$.

2.935A Una dintre primitivele $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4-2x^2-1}$ este

a) $\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}$; b) $\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}$; c) $\ln\left|\frac{x^2-(\sqrt{2}+1)}{x^2+(\sqrt{2}-1)}\right|$; d) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-(\sqrt{2}+1)}{x^2+(\sqrt{2}-1)}\right|$; e) $\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|$; f) $\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2-1}\right|$.

2.936A Una dintre primitivele $\int\sqrt{\frac{e^x+1}{e^x-1}}\,\mathrm{d}x$ este

a) $\frac{1}{e^{2x}-1}$; b) $\frac{1}{e^{2x}+1}$; c) $\frac{e^x}{e^{2x}+1}$; d) $\ln|e^x+\sqrt{e^{2x}-1}|+\arccos e^{-x}$; e) $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+1})$; f) $\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}$.

2.937A Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $F(x)=\ln\sqrt{4+x^2}$ să fie o primitivă a funcţiei $f(x)=\frac{x+a}{4+x^2}, x\in\mathbb{R}$.

a) -2; b) 0; c) 2; d) -1; e) 1; f) 4.

2.938A O primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} xe^x, & x\le 0\\ 3x^2, & x>0\end{cases}$, este

a) $F(x)=\begin{cases} e^x(x-1)+1, & x\le 0\\ x^3, & x>0\end{cases}$; b) $F(x)=\begin{cases} e^x(x+1), & x\le 0\\ x^3, & x>0\end{cases}$;

c) $F(x)=\begin{cases} e^x(x-1)+1, & x\le 0\\ x^3+x, & x>0\end{cases}$; d) $F(x)=\begin{cases} e^x(x-1)+1, & x\le 0\\ x^3+1, & x>0\end{cases}$;

e) $F(x)=\begin{cases} e^x(x-1), & x\le 0\\ x^3, & x>0\end{cases}$; f) $F(x)=\begin{cases} e^x(x+1)-1, & x\le 0\\ x^3, & x>0.\end{cases}$

2.939A Calculaţi $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$, $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$.

a) $\frac{1}{2}\sin^2 x + \ln(\sin x) + C$; b) $\frac{1}{2}\sin^2 x + \ln(\sin(-x)) + C$; c) $\ln(\sin x) + C$;
d) $\frac{1}{2}\cos^2 x + \ln(\sin(-x)) + C$; e) $-\sin^2 x + \ln(\sin x) + C$; f) $-\frac{1}{2}\sin^2 x - \ln(\sin x)$.

2.940A Calculaţi $\int \sin x \sin 2x \, dx$, $x \in \mathbb{R}$.
a) $2\sin 3x$; b) $2\sin^3 x$; c) $\frac{2}{3}\sin x - \frac{2}{3}\sin x\cos^2 x$; d) $\frac{2}{3}\sin x\cos^2 x$; e) $\frac{2}{3}\sin x$; f) $\sin^3 x$.

2.941A Determinaţi $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)} \, dx$, $x \in (e^{-1}, e)$.
a) $\ln\frac{1}{\ln^2 x - 1} + C$; b) $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-\ln^2 x} + C$; c) $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-x^2} + C$; d) $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{x^2-1} + C$;
e) $\ln\frac{1}{1-\ln^2 x} + C$; f) $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\ln^2 x - 1} + C$.

2.942A Determinaţi $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{x^3-x} \, dx$, $x \in (-1, 0)$.
a) $\ln\frac{x^3}{x^2-1} + C$; b) $\frac{1}{3}\ln\frac{x}{1-x^2} + C$; c) $\frac{1}{3}\ln\frac{x}{x^2-1} + C$; d) $\ln\frac{x}{x^2-1} + C$; e) $\ln\frac{x^3}{1-x^2} + C$;
f) $\ln\frac{x}{1-x^2} + C$.

2.943A Fie F o primitivă a funcţiei $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$. Atunci $F(1) - F(-1)$ are valoarea
a) $2\,\mathrm{arctg}\,(\sin 1)$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) 0; d) $\sqrt{2} + C, \forall C \in \mathbb{R}$; e) $-\sqrt{2}$; f) 2.

2.944A Fie $f(x) = x^2 e^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci o primitivă a lui f este
a) $F(x) = e^x(x^2-2x+4)$; b) $F(x) = e^x(x^2-2x-2)$; c) $F(x) = e^x(x^2+2x+2)$;
d) $F(x) = e^x(x^2+2)$; e) $F(x) = e^x(x^2+2x+2)+C$; f) $F(x) = e^x(x^2-2x+2)+1$.

2.945A Fie $I(x)$ primitiva funcţiei $f(x) = x\sin x$ cu proprietatea $I(0) = 0$ şi $J(x)$ primitiva funcţiei $g(x) = x\cos x$ cu proprietatea $J(0) = 1$. Atunci
a) $I(x) = J(x) - 1$; b) $I(x) + J(x) = (x+1)(\sin x + \cos x)$;
c) $I^2(x) - J^2(x) = 1 - x^2$; d) $I^2(x) + J^2(x) = 1 + x^2$;
e) $I(x) + J(x) = 0$; f) $I^2(x) - J^2(x) = x^2 - 1$.

2.946A O primitivă a funcţiei $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, este
a) $\ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{1+x+x^2}\right)$; b) $\ln\left(x - \sqrt{1+x+x^2}\right)$; c) $\ln\left(\sqrt{1+x+x^2}\right)$;
d) $\ln\left(\frac{x}{2} + \sqrt{1+x+x^2}\right)$; e) $\ln\left(x + \frac{1}{2} - \sqrt{1+x+x^2}\right)$; f) $\ln\left(x + \sqrt{1+x+x^2}\right)$.

2.947A Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1|$. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată ?
a) f este derivabilă pe $\mathbb{R}$; b) $F(x) = \frac{x^2}{2} - x$ este o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$;
c) f nu admite primitive pe $\mathbb{R}$; d) f nu are proprietatea lui Darboux;
e) f admite o infinitate de primitive pe $\mathbb{R}$; f) f nu este continuă.

2.948A Să se calculeze $\displaystyle\int \cos^2 x \sin x \, dx$.
a) $-\frac{\cos^3 x}{3}$; b) $\cos^3 x$; c) $-\frac{\cos^3 x}{3} + C$; d) $\frac{\sin^3 x}{3}$; e) $-\frac{\sin^3 x}{3}$; f) $\frac{\cos^3 x}{3}\frac{\sin^2 x}{2}$.

2.949A Fie F primitiva funcţiei $f : (0,1) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$ cu proprietatea $F\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$. Atunci
a) $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$; b) $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$; c) $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$;
d) $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$; f) $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} + 1$.

2.950A Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x^2+2x+1, & x \le 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$. Care dintre funcţiile $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_1(x) = \begin{cases} x^3+x^2+x+C, & x \le 0 \\ e^x + C, & x > 0 \end{cases}$,
$F_2(x) = \begin{cases} x^3+x^2+x, & x \le 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$, $F_3(x) = \begin{cases} x^3+x^2+x, & x \le 0 \\ e^x - 1, & x > 0 \end{cases}$ este primitivă a lui f ?
a) toate trei; b) nici una; c) F_1; d) F_2; e) F_3; f) F_1 şi F_2.

2.951A Fie funcţia $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \le 1, \\ x^2, & x > 1. \end{cases}$ Fie F primitiva lui f cu proprietatea $F(4) = -8$. Atunci
a) $F(-1) = 3$; b) $F(-1) = -3$; c) $F(-1) = -27$; d) $F(-1) \notin \{-27, 3\}$;
e) $F(-1) \in \{3, -3\}$; f) $F(-1) = 27$.

2.952A O primitivă a funcţiei $f(x) = xe^x \sin x, x \in \mathbb{R}$, este
a) $\frac{1}{2}e^x(x\cos x + x\sin x - \sin x)$; b) $\frac{1}{2}e^x(x\sin x + \cos x)$;
c) $\frac{1}{2}e^x(x\sin x - x\cos x + \cos x)$; d) $\frac{1}{2}(1-x)e^x\cos x$;
e) $\frac{1}{2}xe^x(\cos x + \sin x)$; f) $\frac{1}{2}(1-x)e^x\sin x)$.

2.953A Să se calculeze o primitivă a funcţiei $f(x) = x^2\ln x$, $x > 0$.
a) $\frac{x^3}{9}(3\ln x - 1)$; b) $\frac{x^3}{3}(3\ln x - 1)$; c) $\frac{x^3}{3}(\ln x - 1)$; d) $\frac{x^3}{3}(3\ln x + 1)$;
e) $\frac{x^3}{9}(3\ln x + 1)$; f) $\frac{x^3}{3}(\ln x + 1)$.

2.954A Fie $I = \displaystyle\int \mathrm{arctg}\, x \, dx$. Atunci
a) $I = x\,\mathrm{arctg}\, x + C$; b) $I = x\,\mathrm{arctg}\, x - \ln(x^2+1) + C$;
c) $I = x\,\mathrm{arctg}\, x - \ln\sqrt{x^2+1} + C$; d) $I = x\,\mathrm{arctg}\, x - 2\ln(x^2+1) + C$;
e) $I = x\,\mathrm{arctg}\, x - 2\ln\sqrt{x^2+1} + C$; f) $I = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

2.955A Să se calculeze $\lim\limits_{t\to\infty}\int_1^t (x-1)e^{-x}\,dx$.

a) 0; b) limita nu există; c) $\frac{e-1}{2}$; d) $\frac{1}{e}$; e) e; f) ∞.

2.956A Fie funcţiile $f(x)=x\ln(x+1)$,

$$g(x)=(x^2-1)\ln\sqrt{x+1}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4},$$

$$h(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{5}+\frac{x^2}{2}\ln\frac{x+1}{3},$$

$$s(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{2}\ln(x+1)+x-\frac{x^2}{2},$$

definite pentru $x>-1$. Care afirmaţie este corectă ?

a) funcţiile g,h,s sunt primitive ale lui f; b) numai g este primitivă a lui f; c) numai h este primitiva lui f; d) numai funcţia s este primitiva lui f; e) funcţiile g şi h sunt primitive ale lui f; f) funcţia f nu are primitive.

2.957A Să se calculeze $F(x)=\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

a) $F(x)=\arcsin e^x+c$; b) $F(x)=\arccos e^x+c$; c) $F(x)=\operatorname{arctg} e^x+k$; d) $F(x)=\frac{1}{e^{2x}+1}+k$; e) $F(x)=e^{2x}+1+k$; f) $F(x)=\ln(e^x+e^{-x})+k$.

2.958B Fie $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}$ şi fie $F:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f astfel încât $F(0)=0$. Calculaţi $a=F(2)$.

a) $a=1$; b) $a=\frac{11}{9}$; c) $a=\frac{40}{9}$; d) $a=\frac{20}{9}$; e) $a=\frac{32}{3}$; f) $a=\frac{11}{3}$.

2.959B Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$. Dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui f, atunci $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$ este

a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) 0; d) limita nu există; e) limita depinde de F; f) e.

2.960B Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\max\{x,x^2\}$. Atunci

a) f nu admite primitive pe $\mathbb{R}$; b) f este derivabilă; c) f nu este continuă;

d) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)\\ \frac{x^2}{2}, & x\in[0,1]\end{cases}$ este o primitivă a lui f;

e) f nu este monotonă;

f) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{6}\operatorname{sgn} x, & x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)\\ \frac{x^2}{2}, & x\in[0,1]\end{cases}$ este o primitivă a lui f.

2.961B Pentru ce valori ale lui $m\in\mathbb{R}$ funcţia $f(x)=\begin{cases}x^2+m, & x<0\\ x+2m^2, & x\ge 0\end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$?

a) $m=0$; b) $m\notin\{0,\frac{1}{2}\}$; c) $m\in\{0,\frac{1}{2}\}$; d) $m=-\frac{1}{2}$; e) nu există; f) $m\in\mathbb{R}$.

2.962B Fie F o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcţiei $f(x)=xe^{-x}$ cu $F(-1)=0$. Atunci

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-1$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ nu există.

2.963B Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa. Se ştie că $f(x)=\frac{x+1}{x^2+x+1}$ şi $F(0)=0$. Atunci $F(1)$ are valoarea

a) $\frac{\ln 3}{3}+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$; b) $\frac{\ln 3}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$; c) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$; d) $\frac{1}{3}+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$; e) $\pi\ln 3$; f) 1.

2.964B Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^{5n-1}+x^{n-1}}{1+x^{6n}}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Care dintre funcţiile următoare este o primitivă a lui f ?

a) $\frac{1}{n}\operatorname{arctg}(x^n)+1$; b) $\frac{1}{n}\operatorname{arctg}(x^{3n})+3$; c) $\frac{1}{6n}\operatorname{arctg}(x^{6n})+3$; d) $\frac{1}{n}\operatorname{arctg}(x^n)+\frac{1}{3n}\operatorname{arctg}(x^{3n})+1$; e) $\ln(x^{6n}+1)$; f) $\operatorname{arctg}(x^{3n})+10$.

2.965B Să se determine o primitivă a funcţiei: $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}, x\in[0,1)$.

a) $\frac{x}{1-x^3}$; b) $\frac{x\sqrt{x}}{1-x^3}$; c) $\arcsin x^3$; d) $3\arcsin x^{\frac{3}{2}}$; e) $\frac{2}{3}\arcsin x^{\frac{3}{2}}$; f) $x\arcsin x^3$.

2.966B Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ următoare:

1° $x\to\max\{1,x^2\}$;	2° $x\to[x]-x$;
3° $x\to\operatorname{sgn} x$;	4° $x\to(1+x^2)\operatorname{sgn} x$;
5° $x\to[\cos x]$;	6° $x\to\{\sin x\}$.

Una dintre acestea admite primitive. Care ?

a) 1°; b) 2°; c) 3°; d) 4°; e) 5°; f) 6°.

2.967B Fie $F(x)=\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$. Atunci

a) $F(x)=-\frac{1}{1+x^2}+C$; b) $F(x)=\ln(1+x^2)+C$; c) $F(x)=\operatorname{arctg}x+\frac{x}{1+x^2}+C$; d) $F(x)=\frac{\operatorname{arctg}x}{2}+\frac{x}{2(1+x^2)}+C$; e) $F(x)=\operatorname{arctg}x+\frac{x}{2(1+x^2)}+C$; f) $F(x)=\frac{\operatorname{arctg}x}{2}+\frac{x}{(1+x^2)}+C$.

2.968B Să se determine primitivele funcţiei $f(x)=\frac{2x-3}{(x-1)^2(x-2)^2}$.

a) $\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + C$; b) $\frac{1}{-x^2+3x-2} + C$; c) $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x-2} + C$;
d) $\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$; e) $\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} + C$; f) $\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-2)^2} + C$.

2.969B Să se calculeze $F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

a) $F(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + C$; b) $F(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$;
c) $F(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$; d) $F(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + C$;
e) $F(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$; f) $F(x) = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C$.

2.970C Fie $f : [0,2] \to [0,2]$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 2x-2, & x \in (1,2] \end{cases}$. Decideţi:
a) f admite primitive; b) f este strict monotonă; c) f este injectivă; d) f nu este integrabilă pe $[0,2]$; e) f este surjectivă; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

2.971C Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x] - x$. Atunci
a) f este continuă; b) f nu este continuă dar admite primitive; c) f nu are proprietatea lui Darboux, dar $f(\mathbb{R})$ este interval; d) f este injectivă; e) f este descrescătoare; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

2.972C Se consideră funcţia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată ?
a) pentru orice $a \in [-1,1]$ funcţia f are primitive; b) funcţia f este monotonă; c) pentru $a = 0$ funcţia f are primitive; d) pentru $a = 0$ funcţia f este continuă; e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; f) pentru orice $a \in \mathbb{R}$ funcţia f are proprietatea lui Darboux.

2.973C Se consideră funcţiile $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0,\frac{1}{2}] \\ 1, & x \in (\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată ?
a) f şi g admit primitive; b) f admite primitivă, dar g nu admite; c) g admite primitivă, dar f nu admite; d) nici una din funcţii nu admite primitive; e) g este continuă; f) f nu este continuă.

2.974C Fie $a_n = \int_0^n e^{-\sqrt{x}} dx$. Atunci

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$;
e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{-1}$.

2.975C Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi F o primitivă a sa. Dacă $F(x) \cdot f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, şi $F(0) = 1$, atunci $f(x)$ are expresia

a) $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}$; c) $f(x) = \sqrt{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$;
d) $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$; e) $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$; f) $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

2.976C Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)}$, $x \in (0,\infty)$.

a) $\ln x + \ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) + C$; b) $\frac{1}{2}\ln\left(x(x+1)^2(x+2)\right) + C$;

c) $\ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) + C$; d) $\frac{1}{2}\ln x - \ln(x+1) + \ln(x+2) + C$;

e) $\ln\frac{\sqrt{x(x+2)}}{x+1} + C$; f) $\ln x - \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x+2) + C$.

2.977C Fie $I_n(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^5)^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Determinaţi relaţia între I_n şi I_{n+1}.

a) $I_{n+1}(t) = \frac{3n-1}{2n} I_n(t)$; b) $I_{n+1}(t) = \frac{3n-1}{3n} I_n(t)$;

c) $I_{n+1}(t) = \frac{5n-1}{5n} I_n(t) + \frac{t}{5n(1+t^5)^n}$; d) $I_{n+1}(t) = \frac{5n-1}{3n} I_n(t) + \frac{t}{(1+t^5)^n}$;

e) $I_{n+1}(t) = \frac{5n-1}{5n} I_n(t) + \frac{1}{(1+t^5)^n}$; f) $I_{n+1}(t) = \frac{5n-1}{5n} I_n(t) + \frac{t^5}{(1+t^5)^n}$.

2.978C O primitivă a funcţiei $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$, $x \geq 0$ este

a) $x \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$; b) $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; c) $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$;
d) $(x-1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$; e) $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} + \sqrt{x}$; f) $(-1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} + \sqrt{x}$.

2.979C Determinaţi o primitivă a funcţiei $f(x) = \dfrac{1}{5-4\cos x}$ pe intervalul $[0,2\pi]$.

a) $F(x) = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(3\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$; b) $F(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(3\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right), & x \in [0,\pi) \\ \frac{\pi}{3}, & x = \pi \\ \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(3\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + \frac{2\pi}{3}, & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$;

c) $F(x) = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(3\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$; d) funcţia nu admite primitive pe $[0,2\pi]$;

e) $F(x) = \frac{1}{5-4\sin x}$; f) $F(x) = \frac{4\sin x}{5-4\sin x}$.

2.8 Integrale definite

2.980A Fie $I = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$. Atunci

a) $I = \frac{\pi}{6}$; b) $I = \frac{\pi}{12}$; c) $I = \frac{\pi}{18}$; d) $I = \frac{\pi}{12}$; e) $I = \frac{\pi}{8}$; f) $I = \frac{\pi}{24}$.

2.981A Valoarea integralei $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^4 x + \operatorname{ctg}^6 x + \operatorname{ctg}^8 x)\, dx$ este

a) $I = \frac{10}{21}$; b) $I = \frac{21}{10}$; c) $I = \frac{\pi}{2}$; d) $I = \frac{\pi}{4}$; e) $I = \pi$; f) $I = \frac{2}{\pi}$.

2.982A Să se calculeze integrala $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

a) $I = 2\pi$; b) $I = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}$; c) $I = 2\pi\sqrt{2}$; d) $I = \frac{1}{2\pi}$; e) $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; f) $I = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

2.983A Să se calculeze aria cuprinsă între graficele funcţiilor $f(x) = |x|$ şi $g(x) = 1$, pentru $x \in [-1, 1]$.

a) $\frac{1}{2}$; b) 2; c) 1; d) $\frac{1}{3}$; e) 3; f) 4.

2.984A Să se calculeze aria cuprinsă între garficele funcţiilor $f(x) = e^{-x}$ şi $g(x) = e^x$ pentru $x \in [0, 1]$.

a) $e + \frac{1}{e} - 2$; b) $e - 1$; c) $e + 1$; d) $e + \frac{1}{e}$; e) $e - \frac{1}{e}$; f) $e + \frac{1}{e} + 2$.

2.985A Folosind sume Riemann să se calculeze limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}}}{n}.$$

a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; c) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$; d) 1; e) $\sqrt{2}$; f) $2\sqrt{2} - 1$.

2.986A Valoarea integralei $\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{x^6 + 1}$ este

a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{\pi}{12}$; e) $\frac{\pi}{4}$; f) π.

2.987A Care este valoarea integralei $\int_0^1 x^2\sqrt{1 + 3x^3}\, dx$

a) $\frac{14}{27}$; b) 0; c) 1; d) $\frac{4}{27}$; e) $\frac{8}{27}$; f) $\frac{2}{27}$.

2.988A Să se calculeze $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$.

a) $I = \pi$; b) $I = \frac{\pi}{4} - 1$; c) $I = \frac{\pi}{2} - 1$; d) $I = \frac{\pi}{2} + 1$; e) $I = \pi - 1$; f) $I = \pi + 1$.

2.989A Care este valoarea integralei $I = \int_{-1}^1 x^3\sqrt{x^4 + 1}\, dx$.

a) $I = 0$; b) $I = 2$; c) $I = 1$; d) $I = -1$; e) $I = \sqrt{2}$; f) $I = \sqrt{2} + 1$.

2.990A Folosind calculul integral să se calculeze $I = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^2 + k^2}}$.

a) $I = \sqrt{2}$; b) $I = 1 - \sqrt{2}$; c) $I = \sqrt{2} - 1$; d) $I = \frac{\pi}{2}$; e) $I = \pi$; f) $I = e - 1$.

2.991A Să se calculeze $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}^5 x)\, dx$.

a) $I = \frac{1}{4}$; b) $I = \frac{\pi}{2}$; c) $I = \frac{\pi}{4}$; d) $I = \frac{\pi}{6}$; e) $I = 1$; f) $I = \frac{1}{2}$.

2.992A Utilizând suma Riemann să se calculeze

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{2^2} + \sqrt[n]{2^3} + \ldots + \sqrt[n]{2^n}}{n}.$$

a) $I = \frac{3}{\ln 2}$; b) $I = \frac{2}{\ln 3}$; c) $I = \frac{1}{\ln 2}$; d) $I = \frac{2}{\ln 2}$; e) $I = \ln 2$; f) $I = 2\ln 2$.

2.993A Să se calculeze integrala $I = \int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

a) $I = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $I = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$; c) $I = \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $I = \frac{\pi}{2}$; e) $I = \frac{\pi}{4}$; f) $I = e - 1$.

2.994A Să se calculeze integrala $I = \int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{(x^2 + \pi^2)^3}$

a) $I = \frac{1}{2\pi}$; b) $I = \frac{1}{(2\pi)^2}$; c) $I = \frac{3}{(2\pi)^4}$; d) $I = \frac{3}{(2\pi)^2}$; e) $I = 1$; f) $I = e$.

2.995A Valoarea integralei $\int_0^1 e^x \sin x\, dx$ este

a) $\frac{1}{2}(1 + e\sin 1 - e\cos 1)$; b) $\frac{1}{2}(1 - e\sin 1 - e\cos 1)$; c) $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{e\pi}{2}\right)$; d) e; e) $\frac{1}{4}(e\pi)$; f) $1 + e\sin 1 + e\cos 1$.

2.996A Calculaţi $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}$.

a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) 2; d) $\frac{\pi}{8}$; e) $-\frac{\pi}{4}$; f) $\ln 4 - \ln 8$.

2.997A Valoarea integralei $\int_{-1}^2 \frac{|x| - 1}{x + 3}\, dx$ este

a) $-6\ln 3 - 1 - 2\ln 2 - 4\ln 5$; b) $6\ln 3 + 1 + 2\ln 2 + 4\ln 5$; c) $6\ln 3 + 1 - 2\ln 2 - 4\ln 5$; d) $6\ln 3 - 1 - 2\ln 2 - 4\ln 5$; e) $6\ln 3 + 1 + 2\ln 2 - 4\ln 5$; f) $6\ln 3 + 1 - 2\ln 2 + 4\ln 5$.

2.998A Fie $f(x) = \frac{F'(x)}{F^2(x)}, \forall x \in [a,b]$, unde F este o funcţie derivabilă pe $[a,b]$ şi $F(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$. Atunci $\int_a^b f(x)\,dx$ este
a) $\frac{1}{F(b)} - \frac{1}{F(a)}$; b) $\frac{2}{F^3(b)} - \frac{2}{F^3(a)}$; c) $\frac{2}{F^3(a)} - \frac{2}{F^3(b)}$; d) $F(b) - F(a)$; e) $\frac{1}{F(a)} - \frac{1}{F(b)}$; f) $F(a) - F(b)$.

2.999A Fie $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ şi $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$. Atunci
a) $A + B = 1$; b) $A = B$; c) $A - B = \frac{\pi}{2}$; d) $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 1$; e) $A + B = \pi$; f) $A \cdot B = 1$.

2.1000A Aria subgraficului funcţiei $f(x) = \frac{x}{x^2+9}$ mărginit de dreptele $x = 1$ şi $x = 4$ este
a) $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{5}$; b) $\ln\frac{5}{2}$; c) $\ln\frac{2}{5}$; d) $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)$; e) $\ln 10 + \ln 5$; f) $\ln\sqrt{\frac{5}{2}}$.

2.1001A Valoarea integralei $\int_{-2}^{3} |2 - 2x|\,dx$ este
a) 13; b) 5; c) −15; d) 3; e) 7; f) 9.

2.1002A Dacă $\int_0^{\pi/2} (a\sin x + b\cos x - 1)\,dx = 0, a, b \in \mathbb{R}$, atunci
a) $a - b = \pi/2$; b) $a = b = 1/2$; c) $a = -b$; d) $a + b = \pi/2$; e) $a = b = 1$; f) $a = b = \pi/4$.

2.1003A Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_{-1}^{2}\left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} - ax\right)dx = 0$.
a) 2; b) 0; c) −1; d) 1; e) −2; f) 4.

2.1004A Să se calculeze derivata funcţiei $F(x) = \int_0^{\operatorname{arctg} x} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 t}\,dt$.
a) $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$; b) $F'(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$; c) $F'(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$; d) $F'(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{1+x^2}$; e) $F'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$; f) $F'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

2.1005A Să se calculeze $I = \int_{-2}^{2} |x - 1|\,dx$.
a) 2; b) 5; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 3; f) 4.

2.1006A Să se calculeze $I = \int_5^6 \frac{x+1}{x^2 - 16}\,dx$.
a) $\frac{5}{8}\ln 2$; b) $\frac{3}{8}\ln 10 + \frac{5}{8}\ln 2 - \frac{3}{8}\ln 9$; c) $\frac{5}{8}\ln 2 + \frac{3}{8}\ln 9$; d) $\frac{3}{8}\ln 10 - \frac{3}{8}\ln 9$; e) $\ln 2$; f) $\ln 2 + 2\ln 3$.

2.1007A Dacă $I \subset [0, 2\pi]$ este un interval închis, atunci $\lim_{n\to\infty}\int_I \cos nx\,dx$ este
a) 0; b) 1; c) 0,1; d) 10; e) −1; f) 2.

2.1008A Aria A a suprafeţei mărginite de parabolele $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{3}$, $0 \leq x \leq 3$ este
a) $A = 1$; b) $A = \frac{5}{4}$; c) $A = 6$; d) $A = 3$; e) $A = \frac{11}{4}$; f) $A = 5$.

2.1009A Să se calculeze integrala $\int_0^1 \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\,dx$.
a) $1 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9} - \ln 3$; b) $-1 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \ln 3$; c) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9} - \ln 3$; d) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \ln 3$; e) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 9$; f) $\ln 3$.

2.1010A Fie $k = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x \operatorname{tg} t\,dt$. Atunci
a) $k = \infty$; b) $k = \frac{1}{2}$; c) $k = 4$; d) k nu există; e) $k = 1$; f) $k = \frac{1}{3}$.

2.1011A Fie $f : [0, 2] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Aflaţi valoarea integralei

$$\int_0^1 \left(e^{f(x)} + xf'(x)e^{f(x)}\right) dx.$$

a) e; b) $f(1)^e$; c) $f(1)$; d) $e^{f(1)}$; e) $e - 1$; f) $ef(1)$.

2.1012A Fie $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^3 x$. Determinaţi $\xi \in [0, \pi]$ astfel încât

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \pi f(\xi).$$

a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{2\pi}{3}$; e) $\frac{5\pi}{6}$; f) $\frac{\pi}{2}$.

2.1013A Dacă $I \subset [0, 2\pi]$ este un interval închis, atunci $\lim_{n\to\infty}\int_I \sin nx\,dx$ este
a) 0; b) 0,1; c) 1; d) 2; e) 0,2; f) 0,3.

2.1014A Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ \frac{x^2}{3}, & x \geq 1 \end{cases}$ şi $I = \int_0^2 f(x)\,dx$.
Atunci
a) $I = \frac{1}{2}$; b) $I = \frac{8}{9}$; c) $I = \frac{23}{18}$; d) $I = \frac{11}{18}$; e) $I = \frac{7}{9}$; f) $I = 0$.

2.1015A Să se calculeze $\int_{-2}^{2} 2^{[x]}\,dx$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$.

a) 4; b) 2^4; c) $\frac{2^2-2^{-2}}{\ln 2}$; d) 0; e) $\frac{15}{4}$; f) alt răspuns.

2.1016A Să se calculeze $\int_1^{e} \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$.

a) $\cos 1$; b) $2+\cos 1$; c) $1-\cos 1$; d) $1+\cos 1$; e) $2-\cos 1$; f) 0.

2.1017A Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+\ln\left(\frac{2}{n}+1\right)+\ldots+\ln\left(\frac{n}{n}+1\right)\right]$.

a) -1; b) $2\ln 2-1$; c) $-1+\ln 2$; d) $2\ln 2$; e) 1; f) 0.

2.1018A Fie $I=\int_0^{\pi/4}(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^5 x+\operatorname{tg}^7 x)\,dx$. Atunci

a) $I=-\frac{3}{4}$; b) $I=\frac{5}{4}$; c) $I=\frac{2}{3}$; d) $I=2$; e) $I=3$; f) $I=4$;

2.1019B Fie $I=\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$. Decideţi:

a) $I\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$; b) $I\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$; c) $I\in\left(\frac{3}{4},\frac{7}{6}\right)$; d) $I\in\left(\frac{7}{6},\frac{5}{4}\right)$; e) $I\in\left(\frac{5}{4},\frac{7}{4}\right)$; f) $I>\frac{7}{4}$.

2.1020B Fie $a_n=\int_0^{\ln n}\frac{1}{e^x(1+e^{2x})}\,dx$, $n=2,3,\ldots$. Aflaţi $\ell=\lim_{n\to\infty} a_n$.

a) $\ell=\frac{\pi}{2}$; b) $\ell=\frac{\pi}{4}$; c) $\ell=0$; d) $\ell=1-\frac{\pi}{4}$; e) $\ell=1$; f) $\ell=\infty$.

2.1021B Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)e^{|x-1|}$. Să se calculeze aria mulţimii cuprinse între graficul funcţiei, axele de coordonate şi dreapta de ecuaţie $x=2$.

a) $2e-3$; b) $2e-1$; c) $4e-4$; d) $4e$; e) $4e-1$; f) $4e+1$.

2.1022B Să se calculeze $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{\cos x+1}\,dx$.

a) $I=\pi+1$; b) $I=3-\pi$; c) $I=\frac{\pi}{2}+1$; d) $I=-\pi-1$; e) $I=\frac{\pi}{2}-2$; f) 1.

2.1023B Fie $I=\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx$ şi $J=\int_0^1\frac{2x}{\sqrt{3+4x^2}}\,dx$. Care afirmaţie este adevărată ?

a) $I+J=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$; b) $I-J=4-\sqrt{7}+\sqrt{3}$; c) $I+J=\sqrt{7}-\sqrt{3}$; d) $I-J=\frac{8-\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$; e) $I+J=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$; f) $I-J=4-\sqrt{7}-\sqrt{3}$.

2.1024B Fie $A=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ şi $B=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$. Care afirmaţie este adevărată ?

a) $A=1$, $B=\frac{\pi}{2}$; b) $A=1$, $B=\pi$; c) $A=B$; d) $A>B$; e) $A=0$, $B=1$; f) $A=\ln 2$, $B=\frac{\pi}{4}$.

2.1025B Să se calculeze integrala $I=\int_0^{\pi}\left|\cos^3 x\right|\,dx$.

a) $I=\frac{1}{3}$; b) $I=\frac{2}{3}$; c) $I=-\frac{1}{3}$; d) $I=\frac{4}{3}$; e) $I=-\frac{4}{3}$; f) $I=1$.

2.1026B Să se calculeze $I=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

a) $I=1$; b) $I=-1$; c) $I=\frac{1}{4}\ln 2$; d) limita nu există; e) ∞; f) $I=\frac{1}{2}\ln 2$.

2.1027B Fie $a=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$ şi $b=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$. Atunci

a) $a>b$; b) $a<b$; c) $a=b$; d) $a=1$; e) $b=1$; f) $ab=0$.

2.1028B Fie $f:[a,b]\to[\alpha,\beta]$ o funcţie derivabilă, inversabilă, $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$, şi $g:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ inversa sa. Atunci $I=\int_a^b f(x)\,dx+\int_\alpha^\beta g(y)dy$ are valoarea

a) $b\beta+a\alpha$; b) $b\beta-a\alpha$; c) $a\beta+b\alpha$; d) $a\beta-b\alpha$; e) $ab+\alpha\beta$; f) $ab-\alpha\beta$.

2.1029B Fie $I(a)=\int_1^3\frac{dx}{|x-a|+1}$, $a\in\mathbb{R}$, şi $l=\lim_{a\to3}I(a)$. Atunci

a) $l=1$; b) $l=\ln\frac{3}{2}$; c) $l=0$; d) $l=\ln 2$; e) $l=\ln 3$; f) $l=2$.

2.1030B Să se determine $F'(x)$ dacă $F(x)=\int_c^{b(x)}f(t)\,dt$ unde $b:[\alpha,\beta]\to[c,d]$ derivabilă pe (α,β) şi $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ continuă pe $[c,d]$.

a) $F'(x)=f(b(x))$; b) $F'(x)=f'(b(x))-f(c)$; c) $F'(x)=f'(b(x))$; d) $F'(x)=f(b(x))b'(x)$; e) $F'(x)=f(b(x))b'(x)-f(c)$; f) $F'(x)=f'(b(x))b'(x)$.

2.1031B Să se calculeze integrala $I=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{3}{2}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{4}{3}$; e) $\frac{1}{4}$; f) $\frac{1}{3}$.

2.1032B Găsiţi domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x)=\int_0^1\frac{dt}{1+tx}$.

a) $(-1,\infty)$; b) $(-1,0)$; c) $(0,\infty)$; d) $(-\infty,-1)$; e) $(-\infty,1)$; f) $\mathbb{R}$.

2.1033B Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^x$. Să se calculeze aria domeniului cuprins între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele $x=a$, $x=b$, unde a şi b sunt abscisele punctelor de extrem ale funcţiei f.

a) $2-10e^{-2}$; b) 2; c) $-10e^{-2}$; d) e^{-2}; e) 2e; f) $3e+1$.

2.1034B Fie $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$. Atunci

a) $I=\pi$; b) $I=\pi/2$; c) $I=\pi/4$; d) $I=2\pi$; e) $I=\pi/6$; f) $I=\pi/3$.

2.1035B Să se determine aria mărginită de graficele funcţiilor f_n şi f_{n+1} unde

$$f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}^{(*)},\ f_n(x)=\begin{cases}x^n\ln x, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

a) $\frac{1}{(n+1)^2}$; b) $\frac{1}{n}$; c) $\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$; d) $\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}$; e) 1; f) $1-\frac{1}{n^2}$.

2.1036B Care este valoarea lui $a>0$ pentru care $\int_e^a\frac{dx}{x\ln^2 x}=\frac{1}{2}$?

a) $e+1$; b) $2e$; c) $e+2$; d) e^2; e) e^2-1; f) 1.

2.1037B Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de graficul funcţiei $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x}$, axa Ox şi dreptele $x=2$, $x=5$.

a) $-\frac{3}{2}+3\ln\frac{5}{2}$; b) $\frac{3}{2}+3\ln\frac{10}{9}$; c) $\frac{3}{2}-3\ln\frac{5}{2}$; d) $\frac{3}{2}+3\ln\frac{9}{10}$; e) $-\frac{3}{2}+3\ln\frac{10}{9}$; f) $3\ln\frac{5}{2}$.

2.1038B Care este valoarea integralei $I=\int_{e^e}^{e^{e^e}}\frac{dx}{x(\ln x)\ln\ln x}$?

a) $I=e$; b) $I=e\ln e$; c) $I=1$; d) $I=e^e$; e) $I=e-1$; f) $I=1+e$

2.1039C Să se calculeze $\int_0^2\min\left\{x,\frac{2}{1+x^2}\right\}\,dx$.

a) $\frac{\pi}{2}-1$; b) $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}+2\,\mathrm{arctg}\,2$; c) $\frac{1}{2}-\pi$; d) $\pi-1$; e) π; f) $\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\,2$.

2.1040C Să se calculeze aria suprafeţei mărginite de curba $y=\frac{\sin 3x}{\sin^2 x}$, axa Ox şi dreptele $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{3\pi}{4}$.

a) $8-4\sqrt{2}$; b) $3\ln(3+2\sqrt{2})-4\sqrt{2}$; c) $8-4\sqrt{2}+6\ln(3\sqrt{2}-3)$; d) 2π; e) $6\ln(3\sqrt{2}-3)$; f) $8-4\sqrt{2}+3\ln(3\sqrt{2}-3)$.

2.1041C Fie $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\min\left\{x,\frac{2}{1+x^2}\right\}$ şi $I=\int_0^{\sqrt{3}}f(x)\,dx$. Atunci

a) $I=\pi$; b) $I=0$; c) $I=\frac{\pi+2}{3}$; d) $I=\frac{\pi+3}{6}$; e) $I=\frac{2+3\pi}{4}$; f) $I=\frac{6-3\pi}{13}$.

2.1042C Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă. Calculaţi limita şirului $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

a) 0; b) 1; c) ∞; d) 1/2; e) e; f) nu există.

2.1043C Fie funcţia $f:(0,\infty)\setminus\{e^{-1}\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(1+\ln x)}$. Fie $a=\lim_{x\searrow 0}f(x)$ şi $b=\int_e^{e^2}f(x)\,dx$. Atunci

a) $a=-\infty, b=\ln\frac{3}{2}$; b) $a=\infty, b=\ln\frac{5}{2}$; c) $a=\frac{1}{2}, b=\ln\frac{3}{2}$; d) $a=-1, b=\ln 3$; e) $a=e^{-1}, b=\ln(1+2e)$; f) $a=-\infty, b=\ln\frac{1}{3}$.

2.1044C Fie $F(x)=\int_x^{2x}\frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}\,dt$, $x\neq 0$. Decideţi:

a) F este pară; b) F este impară; c) $F(0)=1$; d) F este descrescătoare; e) $\lim_{x\to\infty}F(x)=0$; f) nici unul dintre răspunsurile anterioare nu este corect.

2.1045C Folosind sumele Riemann, să se calculeze limita

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right).$$

a) $\ell=\frac{3}{2}$; b) $\ell=\frac{1}{\pi}$; c) $\ell=\frac{2}{3}$; d) $\ell=\frac{3}{2\pi}$; e) $\ell=\frac{2}{\pi}$; f) $\ell=2$.

2.1046C Aflaţi aria suprafeţei cuprinse între graficul funcţiei $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, axa Ox şi dreptele $x=e$, $x=e^2$.

a) $1+\ln 2$; b) $\frac{1}{2}\ln 2$; c) $\ln 2$; d) $\frac{3}{2}\ln 2$; e) $2\ln 2$; f) $1-\ln 2$.

2.1047C Să se calculeze $\min\limits_{a,b\in\mathbb{R}}\int_{-1}^1(x^2-a-bx)^2\,dx$.

a) $\frac{8}{45}$; b) $\frac{1}{45}$; c) $\frac{4}{5}$; d) $\frac{5}{4}$; e) 8; f) 1.

2.1048C Fie f o funcţie continuă şi $g(x)=\int_x^{x+1}f(t)\,dt$. Calculaţi $g'(x)$.

a) $f(x)$; b) $f(x+1)$; c) $f(x+1)-f(x)$; d) $4x$; e) $f(x)-x$; f) $2f(x)$.

2.1049C Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie cu derivata continuă. Să se calculeze

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b f(x)\cos tx\,dx .$$

a) ∞; b) 1; c) 0; d) $\cos 1$; e) $f(a)$; f) $-\infty$.

2.1050C Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $\alpha f(x)+\beta f(-x)=\gamma$, $\forall x\in\mathbb{R}$, unde $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, astfel încât $\alpha+\beta\neq 0$ şi fie $I=\int_{-a}^a f(x)\,dx$, $(a>0)$. Atunci

a) $I=\frac{2a\gamma}{\alpha+\beta}$; b) $I=\frac{a\gamma}{\alpha+\beta}$; c) $I=1$; d) $I=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$; e) $I=\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta}$; f) $I=\frac{2a}{\alpha+\beta}$.

2.1051C Să se calculeze $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x\,\mathrm{tg}\,\alpha + 1}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

a) $\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha}}\left[\mathrm{arctg}\,\frac{1+\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha}} - \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha}}\right]$; b) $\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $1+\mathrm{tg}\,\alpha$; e) $\mathrm{tg}\,\alpha$; f) 2.

2.1052C Să se determine $m \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $\int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2 + \ln x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m}$.

a) 2; b) $\ln 2$; c) 4; d) $\ln\frac{1}{2}$; e) 1; f) 3.

2.1053C Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{2x^2} e^{2t^2} \sin t\,\mathrm{d}t$, are proprietatea

a) este crescătoare; b) este descrescătoare; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4} = 2$; d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^4} = 2$; e) este impară; f) nu este derivabilă în $x = 0$.

2.1054C Să se calculeze $I = \lim\limits_{a\to\infty} \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{1+|x-a|}$.

a) $I = \ln 3$; b) $I = 1$; c) $I = \mathrm{e}$; d) $I = \mathrm{e}^{-1}$; e) $I = \ln 2$; f) $I = 0$.

2.1055C Fie $f : [1,\infty) \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = 6\ln x - \int_1^{x^2} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$. Aflaţi $A = f([1,\infty))$.

a) $A = (-\mathrm{e}, 0]$; b) $A = [0,1]$; c) $A = [0,\infty)$; d) $A = \mathbb{R}$; e) $A = (-\infty, f(\sqrt{\ln 3})]$; f) $A = (-\mathrm{e}, 1]$.

2.1056C Dacă $I = \int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, atunci

a) $I = \frac{8}{15}$; b) $I = \frac{30}{108}$; c) $I = \frac{29}{108}$; d) $I = \frac{8}{105}$; e) $I = \frac{21}{105}$; f) $I = \frac{30}{105}$.

Capitolul 3

Geometrie şi trigonometrie

3.1 Vectori. Operaţii cu vectori

3.1057A Pentru orice trei puncte A, B, C din plan este verificată una din egalităţile:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = 0$; b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$; c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = 0$; d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$; e) $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$; f) $-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$.

3.1058A Fie ABC un triunghi şi A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor BC, CA, AB. Atunci una din egalităţile următoare este verificată:

a) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{CC_1} = 0$; b) $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 0$; c) $-\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 0$; d) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 0$; e) $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{CC_1} = 0$; f) $-\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{CC_1} = 0$.

3.1059A Care este valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{a} = m\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ şi $\vec{b} = 4\vec{\imath} + m\vec{\jmath} - 7\vec{k}$ să fie perpendiculari ?

a) $m = 2$; b) $m = 3$; c) $m = 4$; d) $m = -3$; e) $m = 5$; f) $m = -4$.

3.1060A Fiind daţi vectorii $\vec{a}, \vec{b}$ astfel ca $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ şi $\vec{a} \perp \vec{b}$, să se determine $m = (5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$.

a) $m = 12$; b) $m = 11$; c) $m = 13$; d) $m = -9$; e) $m = 5$; f) $m = 0$.

3.1061A Valoarea unghiului φ dintre vectorii $\vec{a} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ şi $\vec{b} = 6\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ este

a) $\varphi = \frac{\pi}{6}$; b) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; c) $\varphi = \frac{\pi}{3}$; d) $\varphi = \arccos\frac{2}{7}$; e) $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; f) $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

3.1062A Aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{a} + 3\vec{b}$ şi $3\vec{a} + \vec{b}$ cu $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 30°$ este

a) 2; b) 3; c) 4; d) 6; e) 5; f) 1.

♠ **2199.** Pentru numărul complex $z = 1 + \mathrm{i}$. numărul z^2 este
a) $2\mathrm{i}$; b) $-\mathrm{i}$; c) 1; d) 0; e) -1; f) $1 - \mathrm{i}$.

♠ **2200.** Modulul numărului complex $z = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$ este
a) 1; b) 2; c) $\sqrt{2}$; d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; e) 3; f) 0.

♠ **2201.** Ecuaţia trigonometrică $\sin^2 x = 1$ are în intervalul $[\pi, 2\pi]$ soluţia
a) $\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$; b) $\left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$; c) $\{\pi\}$; d) $\{\pi, 2\pi\}$; e) $\left\{\frac{7\pi}{4}\right\}$; f) $\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$.

♠ **2202.** In triunghiul ABC se dau : $\hat{A} = 45°$, $AC = \sqrt{2}$ şi $AB = 1$. Atunci latura BC are lungimea
a) 1; b) 2; c) 3; d) $\sqrt{3 - \sqrt{2}}$; e) $3 + \sqrt{6}$; f) $3 - \sqrt{2}$.

♠ **2203.** In triunghiul ABC se dau $\hat{C} = 30°$ şi înălţimea $AD = 2$. (D se află pe dreapta BC.) Atunci latura AC are lungimea
a) 4; b) 2; c) 3; d) 5; e) $\sqrt{3}$; f) 1.

♠ **2204.** Produsul scalar al vectorilor $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ este
a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5; f) -1.

♠ **2205.** Modulul (norma, lungimea) vectorului $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ este
a) 3; b) 5; c) -3; d) 4; e) 6; f) 0.

♠ **2206.** Un cerc care conţine punctul $M(3, 4)$ are ecuaţia
a) $x^2 + y^2 - 25 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 3 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 7 = 0$;
d) $x^2 + y^2 - x = 0$; e) $x^2 + y^2 - y = 0$; f) $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

♠ **2207.** Suma semiaxelor elipsei de ecuaţie $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ este
a) 5; b) 1; c) 2; d) 12; e) 4; f) 9.

♠ **2208.** Se dau vectorii $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{v} = 6\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{w} = 5\vec{i} - \vec{j}$. Să se calculeze vectorul $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$.
a) $\vec{s} = 2\vec{i}$; b) $\vec{s} = \vec{0}$; c) $\vec{s} = 12\vec{i} - 2\vec{j}$; d) $\vec{s} = 10\vec{i} - 8\vec{j}$; e) $\vec{s} = 3\vec{j}$; f) $\vec{s} = -\vec{i} - \vec{j}$.

♠ **2209.** Fiecare din diagonalele feţelor unui cub are lungimea $2\sqrt{2}$. Atunci volumul cubului este
a) 8; b) $16\sqrt{2}$; c) $8\sqrt{2}$; d) 4; e) 10; f) 6.

♠ **2210.** Dreapta, din planul xOy, de ecuaţie $x + y - 3 = 0$ conţine punctul A de coordonate
a) $(2, 1)$; b) $(2, -1)$; c) $(-2, 1)$; d) $(-2, -1)$; e) $(2, 2)$; f) $(2, -2)$.

Capitolul 5

Răspunsuri

1. Algebră

1.1 Mulţimi, funcţii. Funcţia de gradul al doilea

1 d) **2** e) **3** d) **4** b) **5** c) **6** b) **7** a) **8** f) **9** e) **10** a) **11** e) **12** d) **13** a) **14** c) **15** a) **16** f) **17** b) **18** e) **19** b) **20** e) **21** c) **22** e) **23** d) **24** f) **25** a) **26** c) **27** b) **28** c) **29** d) **30** a) **31** c) **32** d) **33** b) **34** b) Notăm $t = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ şi obţinem $t \in \left[\frac{4}{5}, \infty\right)$ de unde $(x-2)^2 + \frac{1}{5} \geq 0$, deci $x \in \mathbb{R}$. **35** c) $(x-4)^2 + (y-4)^2 - 32 + m > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, de unde rezultă $-32 + m > 0$, deci $m > 32$. **36** a) **37** c) **38** c) **39** b) **40** a) **41** e) **42** d) **43** b) deoarece $A = (-3, \infty)$ şi $B = (-\infty, \frac{3}{2}]$. **44** b) **45** f) **46** b) **47** a) **48** f) **49** c) **50** a) **51** c) **52** f) **53** e) **54** a) **55** e) **56** b) **57** b) **58** a) **59** d) **60** c) **61** b) **62** c) **63** b) **64** d) **65** d) **66** d) **67** d) **68** c) **69** e) **70** d) **71** a) **72** a) $\sqrt[8]{72} < \sqrt[4]{12}$ deoarece $72 < 12^2 = 144$, iar $\sqrt[4]{12} < \sqrt{6}$, adică $12 < 6^2 = 36$ deci corect este a). **73** c) f este injectivă ($3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$) şi surjectivă deoarece $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = \infty$ şi pentru orice $y \in \mathbb{R}$ există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $y = 3x + 2$ şi anume $x = \frac{y-2}{3}$. Deoarece $3|x| + 2 \geq 2$, avem $\operatorname{Im} g = [2, \infty)$, deci g nu este surjectivă. Funcţia g nu este nici injectivă pentru că $g(x_1) = 3|x_1| + 2 = 3|-x_1| + 2 = g(-x_1)$. **74** e) **75** c) **76** c) **77** c) **78** c) **79** c) **80** b) **81** d) **82** d) **83** b) **84** c) **85** b) **86** c) **87** a) **88** d) **89** f) **90** b) **91** d) Se face substituţia $t = x - \frac{1}{x}$. **92** e) **93** c) **94** d) **95** a) **96** a) **97** b) **98** b) Condiţii de existenţă: $x \geq 1$, $x^4 - x - 1 \leq 0$. După ridicare la pătrat rezultă şi condiţia $2x - x^2 \leq 0$, i.e. $x \in [0, 2]$. După o nouă ridicare la pătrat se obţine ecuaţia $4x^3 - 4x^2 - x = 0$ cu singura soluţie convenabilă $x = (1 + \sqrt{2})/2$. **99** c) **100** a) Condiţii: $x \in [-9, 97]$. Notăm $\sqrt[4]{97 - x} = u \geq 0$, $\sqrt{9 + x} = v \leq 0$. Se obţine sistemul $u + v = 8$, $u^4 + v^2 = 106$ de unde rezultă ecuaţia $u^4 + u^2 - 16u - 42 = 0$

cu singura soluţie pozitivă $u = 3$; se obţin $x = 16$. **101** e) **102** c) **103** c) **104** d) deoarece $A = [\frac{1}{2}, \infty)$ şi $B = [-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}]$. **105** d) **106** c) **107** e) **108** b) **109** d) **110** b) **111** d) **112** e) **113** d) **114** e) **115** c) **116** a) **117** e) **118** b) Se folosesc relaţiile lui Viete. **119** a) **120** a) **121** b) **122** a) **123** a) **124** d) **125** b) **126** d) Cazul $m = 2$ nu convine (o singură rădăcină) **127** b) Punctul $(-1, 3)$ al dreptei $y = 2 - x$ nu este vârful nici unei parabole. **128** b) **129** d) **130** b) **131** c) **132** b) **133** b) **134** c) **135** a) **136** b) **137** Deoarece $1 - x > 0$, $x < 1 \Rightarrow |x+1| = x + 1$ pentru $x > 1$ ($|x+1| = -x - 1$ pentru $x < -1$ ar da $2 = 0$) deci $x \in [-1, 1] \Rightarrow 1 - x = x + 1 \Rightarrow x = 0$, valabil c). **138** c) **139** a) **140** a) **141** c) **142** a) **143** e) **144** a) **145** b) **146** d) **147** d) **148** a) **149** f) **150** b) **151** b) **152** a) este necesar şi suficient ca ecuaţia $f(x) = g(x)$ să nu admită soluţii. **153** b) **154** a) **155** c) **156** c) **157** a) **158** e) **159** d) **160** b) **161** b) Se face graficul funcţiei şi rezultă condiţiile $a > 0$ şi $a - 2 \leq 1 - 2a$. **162** d) **163** c) Se determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $f(x) = y$ să aibă rădăcini reale dacă şi numai dacă $y \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. **164** d) Se foloseşte identitatea $|x - y| = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{(x+y)^2 - 4xy}$. **165** c) Avem $x, y \in \mathbb{N}, x \geq 4, y \geq 3$. Ecuaţia se rescrie $(x+1) + (y+1) = 9$, cu singura soluţie $x = 4, y = 3$. **166** b) Relaţia se rescrie $a^2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + 2ab\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 2a^2 + 4ab$, şi este evident implicată de egalităţile $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 2$ şi $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, care au loc pentru orice $x, y > 0$. **167** d) Cum $ab = cd$ şi $a - b = d - c \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ şi ecuaţia devine $[x - (a+b)]^2 + [y - (a-b)]^2 = 0 \Rightarrow x = a + b, y = a - b$. **168** e) $E(x, y) = (2x + 3y - 5)^2 + (y-1)^2 + 7$, şi minimul se atinge pentru $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$, iar $E(1, 1) = 7$. **169** f) Obţinem $\frac{xy}{x+y} = \frac{(25a^2-7)/3}{5a} < 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{5}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{7}}{5}\right)$. **170** b) **171** c) **172** b) **173** d) **174** c) **175** a) **176** c) **177** d) **178** a) **179** d) **180** a) Din $y = -x^2 + 1$, $x \leq -1$ rezultă $x = -\sqrt{1-y}$, $y \leq 0$, deci schimbând variabila avem $y = -\sqrt{1-x}$, $x \leq 0$. Analog din $y = 2x + 3$, $x > -1$, $y > 1$ rezultă $x = \frac{1}{2}(y - 3)$, $y > 1$, deci schimbând rolul variabilelor $y = \frac{1}{2}(x-3)$, $y > 1$, deci corect este a). **181** c) **182** a) **183** d) **184** f) **185** e) **186** d) **187** a)

1.2 Funcţia exponenţială şi funcţia logaritmică

188 b) **189** b) **190** c) **191** d) **192** a) **193** b) **194** c) **195** f) **196** a) **197** a) **198** c) **199** c) **200** d) **201** e) **202** f) **203** a) **204** c) **205** c) **206** c) **207** a) **208** d) **209** d) **210** c) **211** b) **212** d) **213** b) **214** c) **215** c) **216** c) **217** c) **218** a) **219** d) **220** b) **221** b) **222** e) **223** f) **224** c) **225** f) **226** f) **227** d) **228** b) **229** b) **230** d) Notăm $(1 + \sqrt{3})^x = t > 0$ şi inecuaţia devine $(t-1)^2(t+2) > 0$ cu soluţia

$t \in (0, \infty) \setminus \{0\}$. **231** d) **232** d) **233** c) **234** f) **235** a) **236** f) **237** d) **238** e) **239** b) **240** c) **241** f) **242** e) **243** a) **244** d) **245** a) Se va observa că funcţia $f\colon [2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{\sqrt{x-2}} + 3^{\sqrt{x^2-4}} + 4^{\sqrt{x^2-x-2}}$ este strict crescătoare, iar $f(2) = 3$. **246** b) **247** c) **248** b) **249** b) $x = 3^{\log_4(4y)} \Rightarrow 3^{3^{\log_4(4y)}} + 4^y = 13$ care are soluţie unică. **250** a) **251** d) **252** a) **253** Pentru $x = 3$ avem egalitate, iar funcţiile $f(x) = \frac{3^x}{6^x}$, $g(x) = \frac{4^x}{6^x}$, $h(x) = \frac{5^x}{6^x}$ sunt descrescătoare deci şi $\varphi(x) = f(x) + g(x) + h(x)$ este descrescătoare; $\varphi(0) = 3$, $\varphi(3) = 1$, prin urmare $x \leq 3$ verifică, deci d). **254** a) **255** b) **256** f)

1.3 Numere complexe. Inducţie şi combinatorică. Polinoame

257 c) **258** b) **259** a) **260** d) **261** b) **262** f) **263** e) **264** c)
265 e) **266** d) **267** c) **268** a) **269** b) **270** c) **271** f) **272** a)
273 a) **274** f) **275** f) **276** c) **277** c) **278** a) **279** e) **280** d) **281** e)
282 a) **283** c) **284** e) **285** f) **286** e) **287** c) **288** e) **289** b) **290** d) **291** c)
292 c) **293** d) **294** f) **295** c) **296** a) **297** a) **298** c) **299** a) **300** f) **301** b)
302 b) **303** c) **304** b) **305** a) **306** a) **307** f) **308** a) **309** b) **310**
a) **311** e) **312** d) **313** c) **314** c) **315** b) **316** d) **317** e) **318** a)
319 d) **320** a) **321** f) **322** c) **323** a) **324** b) **325** c) **326** d) **327** d) **328** a)
329 b) **330** c) **331** c) **332** d) **333** d) **334** e) **335** b) **336** b) **337** a) **338** b)
339 a) **340** a) **341** f) **342** c) **343** d) **344** b) **345** b) **346** c) **347** f) **348** a)
Se va arăta că $w = \bar{w}$. **349** b) Se va pune condiţia $w = \bar{w}$. **350** b) **351** d)
352 c) Se va folosi relaţia $(k+1)\mathrm{C}_{n+1}^{k+1} = (n+1)\mathrm{C}_n^k$. **353** d) **354** c) **355** e)
Se calculează $(1 + \mathrm{i})^n$ în două moduri: se dezvoltă cu formula binomului lui
Newton şi $(1+\mathrm{i})^n = (\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}))^n$. **356** b) Avem $10 \cdot C_{40}^2$ cazuri cu
o bilă albă şi C_{40}^3 cazuri cu 3 bile negre, deci în total $10 \cdot C_{40}^2 + C_{40}^3 = 17680$
cazuri cu cel mult o bilă albă. **357** d) **358** b) **359** b) **360** c) **361** a) **362** b)
Rădăcinile sunt de forma $x_1 = \frac{\alpha}{q}$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \alpha q$, şi se vor folosi relaţiile lui
Viète. **363** c) **364** d) **365** d) **366** e) Înlocuind i în ecuaţie, rezultă $m = 7 + 8\mathrm{i}$;
împărţind prin $z - \mathrm{i}$, se află soluţiile $z_{2,3} \in \{1 + 2\mathrm{i}, 3 - 2\mathrm{i}\}$. Cum z_2 şi z_3 se
pot alege în două moduri diferite, a poate lua două valori posibile. **367** c)

1.4 Matrice. Determinanţi. Sisteme liniare

368 f) **369** b) **370** e) **371** d) **372** d) **373** f) **374** a) **375** c) **376**
f) **377** e) **378** c) **379** e) **380** a) **381** b) **382** d) **383** e) **384** b) **385**
a) **386** d) **387** a) **388** d) **389** a) **390** c) **391** f) **392** e) **393** b) **394**
f) **395** e) **396** b) **397** d) **398** d) **399** d) **400** c) **401** c) **402** d) **403** c) **404** c)
Se adună toate liniile la prima, se dă factor comun $x + 4a$ şi se scade prima
coloană din celelalte. **405** a) **406** b) **407** d) **408** c) **409** c) **410** e) **411** b) **412**
d) **413** f) **414** b) **415** a) **416** d) **417** c) **418** a) **419** e) **420** d) **421** d) **422**

c) Dacă punem $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, atunci $A = I_3 + B$ şi deoarece $I_3 B = B I_3$, putem aplica formula binomului pentru calculul lui $(I_3+B)^n$, unde se va ţine seamă că $B^n = 0$ pentru $n \geq 3$. **423** f) **424** d) **425** d) **426** d) Prin calcul rezultă

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$A^4 = I_4$ deci $A^{20} = (A^4)^5 = I_4$. **427** d) **428** a) **429** a) **430** b) **431** b) **432** d) **433** f) **434** d) **435** e) **436** a) **437** d) **438** b) Pentru calculul lui $\det(I_n + aA)$ se vor aduna toate coloanele (liniile) acestui determinant la prima coloană (linie). **439** e) Se scrie $A = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi rezultă $A^n = 2^n \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{3} & -\sin\frac{n\pi}{3} & 0 \\ \sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **440** d) **441** a) Sistemul $AB = O_n$ cu necunoscute coeficienţii $b_1, \ldots, b_n$ ai matricei $B = \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & \ldots & b_n \end{pmatrix}$ este sistem liniar omogen de determinant nul, deci admite soluţii nebanale. **442** e) Indicaţie: prin schimbări de linii sau coloane între ele şi prin înmulţiri cu -1 ale unor linii sau coloane $|D|$ nu se schimbă. Rămân de studiat cazurile:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \quad \text{si} \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \quad \text{etc.}$$

443 c) **444** b) **445** a) **446** f) **447** c) **448** e) **449** b) Determinantul (Vandermonde) al sistemului este $ab(b-a)$. **450** e) Obţinem $\Delta = 0 \Leftrightarrow a \in \{-1, 2\}$, iar pentru $a = -1$ sistem simplu nedeterminat, deci $a = 2$. **451** d) **452** b) **453** c)

1.5 Structuri algebrice

454 c) **455** e) **456** a) **457** f) **458** b) **459** f) **460** d) **461** f) **462** d) **463** c) **464** c) **465** d) **466** c) **467** c) **468** b) **469** a) **470** d) **471** c) **472** a) **473** b) **474** d) **475** a) **476** e) **477** f) **479** b) **480** f) **481** a) **482** f) **483** a) **484** b) **485** c) **486** a) **487** b) **488** d) **489** f) **490** b) **491** e) **492** b) Trebuie să fie satisfăcută una din relaţiile $AB = O_2$, $BA = O_2$. **493** a) **494** f) **495** a) **496** d) **497** c) **498** b) **499** e) **500** b) **501** a) **502** b)

503 e) **504** a) **505** e) **506** d) **507** c) **508** c) **509** e) **510** b) **511** d) **512** d) **513** b) **514** d) **515** c) **516** e) Fie $H = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Atunci mulţimea $\{a_1^2, a_1 a_2, ..., a_1 a_n\}$ este egală cu H, deci există $j \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât $a_1 a_j = a_1$; rezultă că elementul neutru este a_j şi deci aparţine lui H. Analog se arată că orice element din H are simetricul tot în H. **517** b) **518** b) **519** d) **520** d) **521** c) **522** a) **523** b) **524** c)

2. Analiză matematică

2.1 Numere reale. Progresii. Şiruri

525 c) **526** f) **527** a) **528** b) **529** d) **530** a) **531** e) **532** c) **533** f) **534** b) **535** f) **536** e) **537** a) **538** e) **539** f) **540** c) **541** a) **542** b) **543** b) Se ţine seama că $\varepsilon_1 = |\pi^2 - 10|$, $\varepsilon_2 = |e^3 - 20|$, $\pi \cong 3,1416$, $e \cong 2,7183$. **544** a) **545** e) **546** c) **547** c) **548** a) **549** b) **550** d) **551** c) **552** c) **553** f) **554** e) **555** a) **556** e) **557** d) **558** a) **559** b) Dacă $x_{2n} \to \ell_1$, $x_{2n+1} \to \ell_2$, $x_{3n} \to \ell_3$, atunci $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$ deoarece subşirurile $x_{2n} \cap x_{3n}$ şi $x_{2n+1} \cap x_{3n}$ au amândouă limita ℓ_3. **560** d) **561** a) Din prima relaţie $z = 3 - x - y$ şi prin înlocuire în a doua se obţine $x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 3 = 0$, care, considerată ca o ecuaţie în y, conduce la $y = \frac{1}{2}(3 - x \pm \sqrt{-3(x-1)^2}$. Rezultă $x = 1$, etc. **562** c) **563** d) **564** d) $D = (1, \infty) \cup \{e^{-n} | n \in \mathbb{N}^*\}$ **565** e) **566** c) **567** d) **568** f) Se recomandă graficul lui f. **569** a) **570** b) **571** b) **572** a) **573** c) **574** b) Se porneşte de la identitatea $\sum\limits_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$, $\forall q \neq 1$. Derivând în raport cu q, obţinem: $\sum\limits_{k=1}^{n} (k-1) q^{k-2} = \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)'$; înmulţind cu q, obţinem suma seriei $\sum\limits_{k=1}^{n} (k-1) q^{k-1}$.

2.2 Limite

575 c) **576** a) **577** d) **578** b) **579** d) **580** c) **581** e) **582** f) **583** d) **584** b) **585** a) **586** d) **587** d) **588** c) **589** c) **590** d) **591** d) **592** d) **593** a) **594** b) **595** c) **596** e) **597** a) **598** a) **599** c) **600** c) **601** d) **602** d) **603** a) **604** b) **605** f) **606** e) **607** f) **608** a) **609** c) **610** c) **611** c) **612** f) **613** d) **614** d) **615** c) **616** c) **617** d) **618** a) **619** b) Pentru $0 < \alpha < 1$ avem $0 < a_n < \alpha^n \to 0$; pentru $\alpha = 1$ avem $a_n = \frac{1}{2^n} \to 0$; pentru $\alpha > 1$ avem $0 < a_n < \frac{\alpha^n}{\alpha \cdot \alpha^2 \cdots \alpha^n} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \to 0$. **620** f) **621** c) $\ell = \lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\frac{\sqrt{x+2} - 3}{x-7} - \frac{\sqrt[3]{x+20} - 3}{x-7}}{\frac{\sqrt[4]{x+9} - 2}{x-7} - \frac{\sqrt[5]{x+25} - 2}{x-7}}$. Notăm $t = \sqrt{x+2}$, $u = \sqrt[3]{x+20}$, $v = \sqrt[4]{x+9}$, $w = \sqrt[5]{x+25}$ şi obţinem succesiv $\lim\limits_{t \to 3} \frac{t-3}{t^2-9} = \lim\limits_{t \to 3} \frac{1}{t+3} = \frac{1}{6}$,

$\lim\limits_{u\to 3}\frac{u-3}{u^3-27}=\lim\limits_{u\to 3}\frac{1}{u^2+3u+9}=\frac{1}{27}$, $\lim\limits_{v\to 2}\frac{v-2}{v^4-16}=\lim\limits_{v\to 2}\frac{1}{v^3+2v^2+4v+8}=\frac{1}{32}$, $\lim\limits_{w\to 2}\frac{w-2}{w^5-32}=\lim\limits_{w\to 2}\frac{1}{w^4+2w^3+4w^2+8w+16}=\frac{1}{5\cdot 16}=\frac{1}{80}$. Se poate utiliza şi regula lui l'Hospital direct pentru tipul $\frac{0}{0}$. **622** d) **623** b) **624** b) **625** c) **626** b) **627** b) **628** a) **629** e) **630** a) **631** c) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton crescător, mărginit de 0 şi 1, iar dintre limitele posibile $l\in\{1\pm\sqrt{1-b}\}$ obţinute trecând la limită în relaţia de recurenţă, convine doar $l=1-\sqrt{1-b}$. **632** f) **633** a) **634** c) **635** e) **636** a) **637** e) **638** a) **639** e) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$

$$\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}-1\right)n}=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}[(n(a^{\frac{1}{n}}-1)+n(b^{\frac{1}{n}}-1)+n(c^{\frac{1}{n}}-1)]}$$

$=e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=\sqrt[3]{abc}$. **640** d) **641** a) **642** c) $y_n=\frac{1^2}{n^3+n^2}+\frac{2^2}{n^3+n^2}+\ldots+\frac{n^2}{n^3+n^2}<x_n<\frac{1^2}{n^3+1}+\frac{2^2}{n^3+1}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+1}=z_n$ dar $y_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n^2)}\to\frac{1}{3}$, $z_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)}\to\frac{1}{3}$ deci $x_n\to\frac{1}{3}$. **643** f) **644** c) **645** a) **646** a) **647** e) Dacă tasta funcţională este f, după n apăsări pe tasta respectivă se obţine valoarea $x_n=(f\circ f\circ\ldots\circ f)(x_0)$ unde f apare de n ori, $n\in\mathbb{N}$. Acesta este un şir definit prin recurenţă sub forma $x_n=f(x_{n-1})$. Şirurile $x_n=\sin x_{n-1}, x_n=\operatorname{arctg} x_{n-1}$ sunt convergente la 0. Şirul $x_n=\cos x_{n-1}$ converge la o valoare $\neq 1$. Şirul $x_n=\mathrm{e}^{x_{n-1}}$ este nemărginit şi după mai multe apăsări pe tasta e^x calculatorul va afişa un mesaj de eroare prin depăşirea capacităţii registului de memorare. Şirul $x_n=\ln x_{n-1}$ nu este corect definit (la un moment dat $x_{n-1}<0$ şi x_n nu mai poate fi calculat, calculatorul semnalând o eroare). Şirul $x_n=\sqrt{x_{n-1}}$ este convergent la 1. **648** d) **649** d) **650** e) **651** a) **652** a) **653** c) Aplicând inegalitatea Cauchy-Schwartz $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2\leq\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n}y_j^2\right)$ pentru $y_1=\cdots=y_n=1$, obţinem $\frac{1}{n}\left|\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right|\leq\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}=0$. Un contraexemplu pentru răspunsurile (greşite) b,d,e,f îl constituie şirul $x_n=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, iar pentru răspunsul (greşit) a, intercalatul acestui şir cu şirul nul. **654** a) **655** b) **656** a) **657** c) **658** c) **659** c) Dacă $S_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$, calculând S_n-xS_n obţinem în final $S_n=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}$. Pentru $x<1$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{(1-x)^2}$, iar pentru $x>1$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{n(1-x)}=0$; rezultă $l=1-0=1$. **660** f) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ nu există deoarece limitele laterale sunt diferite, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ conform criteriului majorării, ($|g(x)|\leq\mathrm{e}^{-x}$) şi $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=\infty$ conform criteriului minorării ($h(x)\geq\mathrm{e}^x$). **661** f)

2.3 Funcţii continue

662 b) **663** b) **664** a) **665** d) **666** f) **667** c) **668** a) **669** d) **670** e) **671** f) **672** c) **673** b) **674** d) **675** a) **676** a) **677** e) **678** c) **679** e) **680** d) **681** e) **682** d) **683** e) **684** f) **685** a) **686** d) **687** b) **688** c) **689** c) **690** a) **691** e) **692** f) **693** d) **694** b) **695** a) **696** e) **697** d) **698** e) **699** c) **700** c) **701** d) **702** d) **703** b) Se va folosi definiţia cu şiruri a continuităţii. **704** d) Fie $x\in\mathbb{R}$ arbitrar. Din enunţ rezultă imediat că $f(x)=f\left(\frac{x+1}{2}-1\right)$ şi prin inducţie $f(x)=f\left(\frac{x+1}{2^n}-1\right)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Din continuitate se deduce că $f(x)=f(-1)$. **705** c) **706** b) **707** d) **708** c) **709** d) **710** a) **711** f) **712** c) **713** d) Imaginea este evident un interval, dar $f\left(\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]\right)=\left[0,\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4},1\right]$, deci f nu are proprietatea lui Darboux.

2.4 Derivabilitate

714 a) **715** c) **716** b) **717** d) **718** c) **719** d) **720** b) **721** a) **722** a) **723** c) **724** d) **725** e) **726** b) **727** a) **728** a) **729** a) **730** e) **731** b) **732** c) **733** f) **734** b) **735** e) **736** d) **737** e) **738** d) **739** d) **740** c) **741** c) **742** b) **743** d) **744** d) **745** a) **746** c) **747** a) **748** a) **749** d) **750** c) **751** b) **752** a) **753** a) **754** c) **755** c) **756** c) **757** c) **758** a) **759** b) Dacă $x\neq\pm1$, $f'(x)=\frac{2}{1+x^2}\frac{1-x^2}{|1-x^2|}$. **760** b) **761** a) **762** b) Se va arăta că $f^{(n)}(x)$, $x>0$, este de forma $\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ unde P şi Q sunt funcţii polinomiale. **763** b) **764** e) **765** e) **766** e) $4xg''(x)+2g'(x)=g(x)\Rightarrow 2g^{(n-1)}(x)+4[xg^{(n)}(x)+(n-2)g^{(n-1)}(x)]=g^{(n-2)}(x)\Rightarrow(4n-6)g^{(n-1)}(0)=g^{(n-2)}(0)$ etc. **767** c) **768** e) **769** a) **770** c) **771** e)

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<-1\\ 1, & x=-1\\ -(n+1)x, & x\in(-\frac{1}{n},-\frac{1}{n+1}]\\ 1, & x=0\\ nx, & x\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]\\ 0, & x>1\end{cases}$$

este continuă în $x=0$. **772** f) $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right)$, $f'_s(-1)=-\infty$, $f'_d(-1)=+\infty$, $f'_s(1)=-\infty$, $f'_d(1)=+\infty$, deci $x_1=-1$ şi $x_2=1$ sunt puncte de întoarcere.

2.5 Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatei

773 d) **774** e) **775** c) **776** d) **777** f) **778** c) **779** b) **780** a) **781** f) **782** f) **783** e) **784** c) **785** a) **786** e) **787** c) **788** c) **789** a) **790** b) **791** e) **792** c) **793** f) **794** d) **795** c) **796** a) **797** f) **798** d) **799** c) Se **800** d) **801** c) **802** b) **803** e) **804** e) pune condiţia $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **805** c) **806** d) **807** c) **808** f) **809** e) Se calculează $f''(x) = \frac{1}{x}(1 + 6ax^2)$; dacă $a < 0$, atunci f'' are o singură rădăcină reală pozitivă, iar pentru $a \geq 0$, f'' nu are nici o rădăcină reală. **810** c) **811** e) **812** a) **813** b) Extremele funcţiei au loc în acele puncte pentru care $\operatorname{tg}^2 x = n$. Se deduce imediat că $M_n = \dfrac{n^{\frac{n}{2}}}{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$. **814** c) **815** a) **816** a) **817** a) **818** d) **819** c) **820** b) **821** e) **822** c) **823** f) **824** c) **825** e) **826** d) **827** f) **828** f) **829** b) **830** c) **831** d) **832** f) **833** c) **834** b) **835** a) **836** a) **837** d) **838** b) **839** d) **840** d) **841** f) **842** f) Se calculează derivata $f'(x) = -\dfrac{x+2}{(x+1)^2}e^{-x}, \forall x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ şi $f'(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}e^{x}, \forall x \in (0, \infty)$; în $x = 0$ funcţia f nu este derivabilă. Funcţia are două puncte de extrem local $x_1 = -2$ (maxim local) şi $x_2 = 0$ (punct de minim). **843** b) $f'(x) = \dfrac{x^3 + x + a}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; folosind metoda şirului lui Rolle, rezultă că f' are o singură rădăcină reală, α, pentru orice $a \in \mathbb{R}$. Punctul de abscisă α este minim global al funcţiei f şi deci $f(\mathbb{R}) = [f(\alpha), \infty)$; trebuie deci impuse condiţiile $f'(\alpha) = f(\alpha) = 0$. Rezultă două soluţii: $a_1 = -2$, $\alpha_1 = 1$, $a_2 = 2$, $\alpha_2 = -1$; deci $S = a_1 + a_2 = 0$.

2.6 Grafice de funcţii

844 b) **845** c) **846** b) **847** c) **848** d) **849** b) **850** c) **851** e) **852** c) **853** a) **854** c) **855** c) **856** e) **857** e) **858** b) **859** f) **860** e) **861** a) **862** a) **863** b) **864** b) **865** d) **866** d) **867** d) **868** c) **869** d) **870** a) **871** d) **872** b) **873** f) **874** c) **875** d) **876** c) **877** e) **878** f) **879** d) **880** d) **881** b) **882** d) **883** b) **884** a) **885** e) **886** d) **887** c) **888** b) **889** b) **890** c) **891** a) Fie $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$; $f'(x) = 12x^2 - 3$; $f''(x) = 24x$; $f(x) = 4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 (x+1)$. Pentru g, acolo unde $f(x) < 0$ luăm simetricul graficului faţă de axa Ox. **892** a) $f'(x) = x^{\frac{1-2x}{x}}(1 - \ln x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$. Funcţia are un maxim global în $x = e$ şi $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$. **893** c) **894** b) **895** b) **896** a) **897** d) **898** c) **899** c) **900** c) **901** d) **902** e) **903** e) **904** c) **905** b) **906** d) **907** d) **908** b) **909** a) **910** d) **911** e) **912** e) **913** d) **914** a) **915** c) Obţinem $f'(x_k) = \dfrac{(2k\pi + \frac{3\pi}{2})^2 + (2k\pi + \frac{\pi}{2})^2}{\pi(2k\pi + \frac{3\pi}{2})(2k\pi + \frac{\pi}{2})}$ şi $l = \lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{8\pi^2 k^2 + \ldots}{4\pi^3 k^2 + \ldots} = \dfrac{2}{\pi}$. **916** d) Obţinem $f'(x) = -2 \cdot \dfrac{3x^2 + 3x + 1}{x^2(x+1)^3}$, $f''(x) = 6 \cdot \dfrac{(2x+1) \cdot [(x+1)^2 + x^2]}{x^4(x+1)^4}$. **917** b) **918** a) **919** c) **920** b) Dacă $a \leq 0$, atunci $D = \mathbb{R}$, dacă $a > 0$, atunci $D = \mathbb{R} \setminus \{\ln a\}$; $f'(x) = \dfrac{e^x - ax - a}{(e^x - a)^2}e^x$. Pentru a studia ecuaţia $e^x - ax - a = 0$, se poate folosi metoda grafică: fie $g(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$ şi atunci ecuaţia devine $a = g(x)$. Pe graficul lui g rezultă că ecuaţia are două rădăcini reale dacă şi numai dacă $a > 1$.

2.7 Primitive

921 e) **922** b) **923** a) **924** b) **925** c) **926** c) **927** a) **928** d) **929** c) **930** a) **931** c) **932** b) **933** c) **934** c) **935** d) **936** d) **937** b) **938** a) **939** d) **940** c) **941** b) **942** e) **943** a) **944** f) **945** d) **946** a) **947** e) **948** c) **949** b) **950** e) **951** c) **952** c) **953** a) **954** c) **955** d) **956** b) **957** c) **958** c) **959** b) **960** e) **961** c) **962** e) **963** b) **964** d) **965** e) **966** a) **967** d) **968** b) **969** d) **970** e) **971** c) **972** c) Se consideră funcţia continuă

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

şi notăm cu G o primitivă a sa. Rezultă că orice primitivă a lui f ar fi de forma $F(x) = -x^2 \cos \dfrac{1}{x} + 2G(x) + C$. Se va verifica că această funcţie este derivabilă în origine şi derivata sa este $f(0)$ doar pentru $a = 0$. **973** b) **974** d) $\sqrt{x} = t$ **975** b) **976** e) **977** c) **978** c) **979** b)

2.8 Integrale definite

980 a) **981** a) $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^6 x)(1 + \operatorname{ctg}^2 x)dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^6 x)(\operatorname{ctg} x)'dx = -\left(\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \frac{1}{7}\operatorname{ctg}^7 x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{10}{21}$. **982** c) **983** c) **984** a) **985** c) **986** d) **987** a) **988** c) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = (\arcsin x + \sqrt{1-x^2})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$. **989** a) $y = x^3\sqrt{x^4+1}$ este impară deci $I = 0$. **990** c) **991** a) $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^3 x(1 + \operatorname{ctg}^3 x)dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^3 x \cdot (\operatorname{ctg} x)'dx = -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$. **992** c) **993** a) **994** c) **995** a) **996** d) **997** c) **998** e) **999** b) **1000** f) **1001** a) **1002** d) **1003** c) **1004** e) **1005** b) **1006** b) **1007** a) **1008** c) **1009** a) **1010** b) **1011** d) **1012** f) **1013** a) **1014** c) **1015** e) **1016** c) **1017** b) **1018** c) **1019** d) **1020** d) **1021** c) **1022** b) **1023** a)

1024 f) $A = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$; analog se calculează şi B. **1025** d) **1026** c) **1027** c) **1028** b) **1029** e) **1030** d) **1031** f) **1032** a) **1033** a) **1034** c) **1035** d) **1036** d) **1037** b) **1038** c) **1039** b) **1040** b) **1041** d) **1042** a) **1043** a) **1044** b) **1045** e) **1046** c) **1047** a) **1048** c) **1049** c) **1050** a) Se integrează ambii membri ai egalităţii între $-a$ şi a. **1051** a) **1052** b) **1053** c) **1054** f) Pentru $a > 3$ avem $\int_1^3 \frac{dx}{1+|x-a|} = \int_1^3 \frac{dx}{1+a-x} = \ln\frac{a}{a-2}$. **1055** e) $f'(x) = \frac{6}{x} - \frac{2x}{x^2}e^{x^2} = \frac{6-2e^{x^2}}{x}$; ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţia $x = \sqrt{\ln 3}$, care este punct de maxim global al funcţiei f; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. Ultima limită se poate calcula, de exemplu, astfel:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \le \lim\limits_{x\to\infty}\left(6\ln x - \int_1^{x^2} dt\right) = -\infty$. **1056** d) $\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}dx =$
$-\frac{1}{2}\int_0^1 ((1-x^2)-1)^2\sqrt{1-x^2}(1-x^2)'dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 [(1-x^2)^{\frac{5}{2}} - 2(1-x^2)^{\frac{3}{2}} +$
$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}](1-x^2)'dx == \left[-\frac{1}{7}\sqrt{(1-x^2)^7} + \frac{2}{5}\sqrt{(1-x^2)^5} - \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\right]\Big|_0^1 =$
$\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{105}$.

3. Geometrie

3.1 Vectori. Operaţii cu vectori

1057 d) **1058** d) **1059** c) **1060** c) **1061** d) **1062** c) **1063** c) **1064** d) **1065** f) **1066** a) **1067** a) **1068** e) **1069** a) **1070** d) **1071** f) **1072** b) **1073** e) **1074** a) **1075** a) **1076** a) **1077** f) **1078** e) **1079** d) **1080** a) **1081** b) **1082** d) **1083** f) **1084** f) **1085** b) **1086** a) **1087** a) **1088** f) **1089** c) **1090** f) **1091** c) **1092** b) **1093** c) **1094** d) **1095** e) **1096** a) **1097** f) **1098** a) **1099** c) **1100** a) **1101** c) **1102** a) **1103** a) **1104** a) **1105** e) **1106** d) **1107** e) **1108** e) **1109** f) **1110** d) **1111** a) **1112** a) **1113** b) **1114** a) **1115** c) **1116** f) Notând cu O intersecţia diagonalelor paralelogramului avem $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$. **1117** d) Avem $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}(x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC})$. P se află pe mediană dacă vectorul $\overrightarrow{AA_1}$ al medianei este coliniar cu $\overrightarrow{AP}$. Cum $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ aceasta revine la $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = \alpha(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$, sau cum $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ sunt independenţi la $x = y = \alpha$. **1118** e) **1119** d) Trebuie ca $\overrightarrow{BC} \perp \vec{u}$. Fie $\vec{u} = m\vec{\imath} + n\vec{\jmath}$ şi cum $\overrightarrow{BC} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$, condiţia devine $3m - 4n = 0$. **1120** c) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP})$. **1121** c) In paralelogramul $ACC'A'$ avem $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})$ iar $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AO})$. **1122** d) **1123** a) **1124** a) **1125** f) **1126** a) **1127** c) **1128** d) **1129** e) **1130** a) **1131** d) **1132** b) Deoarece $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + k\,\overrightarrow{BC}$ rezultă $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \left(\frac{1}{2} + k\right)\overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{AB}$ iar $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Coliniaritatea vectorilor $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{PN}$ atrage $k = 1$.

3.2 Dreapta în plan

1133 a) **1134** d) **1135** b) **1136** a) **1137** c) **1138** a) **1139** b) **1140** a) **1141** a) **1142** c) **1143** f) $m_{BC} = -\frac{1}{2}$. **1144** c) $m_{BC} = 1$ şi înălţimea are ecuaţia $y + 1 = -(x-1)$. **1145** d) Mijlocul segmentului BC este $M(6,2)$ şi ecuaţia medianei $\frac{y-4}{2-4} = \frac{x-5}{6-5}$. **1146** e) **1147** c) **1148** d) **1149** d) $m_{OA} = \frac{3}{2}$ şi d are ecuaţia $y - 3 = -\frac{2}{3}(x-2)$. **1150** e) **1151** b) **1152** c) Ecuaţia lui AB prin $B(0,1)$, $A\left(\frac{a-1}{a}, 0\right)$. Se obţine $\frac{|a|}{|a-1|} + 1 = 3$. **1153** b) $m_{AM} = \frac{b}{a-2}$; $m_{BM} = \frac{b-1}{a}$ şi $b = ma$, tăieturi este $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$. **1154** d) $m_{AM} = \frac{y_0}{x_0 - a}$, $m_{BM} = \frac{y_0 - b}{x_0}$, $m_{CM} = \frac{b - y_0}{a - x_0}$, $m_{OM} = \frac{y_0}{x_0}$. $\frac{b(b-\ )}{a(a-\ )} = -1$. **1155** b) **1156** b) BC are ecuaţia $\frac{y+2}{3} = \frac{x-7}{-4} \Leftrightarrow 4y + 3x - 13 = 0$. **1157** c) $|m+7| = 17 \to m_1 = -24$, $m_2 = 10$. **1158** e) $P(-1,-1) \in D_1$ şi $d(P, D_2) = \frac{1}{10}$. **1159** a) **1160** d) **1161** d) $S =$ aria $\Delta ABC +$ aria ΔDAC. **1162** c) **1163** d) **1164** d) **1165** f) **1166** a) **1167** c) **1168** e) **1169** e) **1170** f) **1171** d) **1172** e) $\frac{x_c+2+1}{3} = 2 \to x_c = 3$. $\frac{y_c+3+4}{3} = 4 \to y_c = 5$ Mediana din C este dreapta GC cu panta $m = 1$. **1173** e) $AD : 2y + x - 4 = 0$; $CD : 2y - x + 4 = 0$. **1174** b) $AB : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$; $BC : -\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$. **1175** e) **1176** e) **1177** b) $m_{AC} = m$. Ecuaţia lui AB, $y = -\frac{1}{m}(x-1)$. $B\left(-2, \frac{3}{m}\right)$ şi $|AB| = |AC|$ conduce la $m^4 - 8m^2 - 9 = 0$ cu soluţia $m^2 = 9$. **1178** a) d are ecuaţia $y = x + 2$. $|AC| = |BC|$ conduce la $a + 4b = 15$. Cum $b = a + 2$ rezultă $a = \frac{7}{5}$, $b = \frac{7}{5} + 2$. **1179** a) $|AC| = |BC|$ conduce la $a = 5$ şi atunci $x_0 = \frac{5}{2}$, $|AM| = |MB|$ conduce la $y_0 = \frac{11}{4}$. **1180** a) Ecuaţia lui MA este $\frac{y-a}{3-a} = \frac{x-a}{1-a}$ şi atunci $x_p = \frac{2a}{3-a}$. Ecuaţia lui MB este $\frac{y-a}{5-a} = \frac{x-a}{3-a}$ de unde rezultă $y_Q = -\frac{2a}{3-a}$. Atunci PQ are ecuaţia $\frac{x}{x_P} + \frac{y}{y_Q} - 1 = 0$ cu panta $m = -\frac{y_Q}{x_P}$. **1181** b) $b = a - 4$, $m_{AM} = \frac{b-2}{a-1}$, $m_{BM} = \frac{b}{a-4}$, $\frac{b-2}{a-1} \cdot \frac{b}{a-4} = -1 \Rightarrow b - 2 = -a + 1$ şi $b = -a + 3 \to s = 3$. **1182** c) $m_{A'B'} = -\frac{5+m}{4+m}$. Ecuaţia mediatoarei lui $A'B'$ este $y - \frac{5+m}{2} = \frac{4+m}{5+m}\left(x - \frac{4+m}{2}\right)$. Se obţine $x_0 = -\frac{1}{2}$. **1183** c) **1184** a) $d_2 : y = x - 1$; $d_3 : y = -x + 1$, $d_3 \cap d_1 = B(0,1)$; $d_2 \cap d_1 =$ $C(-2,-3)$, $S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}(1+2+3) = 3$. **1185** c) $x_M = y_M$ şi
$\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x_M & x_M & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x_M & x_M & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right|$. Se obţine $3|x_M - 1| = 2$ cu soluţiile $\frac{5}{3}$