Capitolul 1

Algebră

1.1 Mulţimi, funcţii. Funcţia de gradul al doilea

1.1A Înlocuim variabila $z = a - (x + y)$ în egalitatea $2xy - z^2 = 9$; $2xy - [a - (x + y)]^2 = 9$, $x^2 + y^2 - 2ax = -a^2 - 9$ sau $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2 - 9$. Avem soluţie unică dacă $a^2 - 9 = 0$, $a = \pm 3$ deci $x = y = -z = a$, $S = 0$.

1.2A Condiţiile $f(0) = 6$, $f(2) = 0$, $f(3) = 0$ se scriu pentru $f = a_0 + a_1X + a_2X^2$: $a_0 = 6$, $2a_1 + 4a_2 = -6$, $3a_1 + 9a_2 = -6$ şi rezultă $a_1 = -5$, $a_2 = 1$, $f = 6 - 5X + X^2$.

1.3A Se scrie $(\sqrt{3x + 19})^2 = \left(\sqrt{x + 7} + \sqrt{x + 2}\right)^2$ şi se obţine $(x + 10)^2 = 4(x^2 + 9x + 14)$, $3x^2 + 16x - 44 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = 2$, $x_2 = -\dfrac{22}{3}$; numai $x_1 = 2$ este soluţie în domeniul $D : x \geq -7$.

1.4A Ecuaţia $x^2 - 4x = 3\sqrt{x^2 - 4x + 20} - 10$ se poate scrie $x^2 - 4x + 20 = 3\sqrt{x^2 - 4x + 20} + 10$ şi cu notaţia $\sqrt{x^2 - 4x + 20} = t$, $t > 0$, devine $t^2 - 3t - 10 = 0$ cu rădăcinile $t_1 = 5$, $t_2 = -2$; soluţie este numai $t_1 = 5 = \sqrt{x^2 - 4x + 20}$, deci $x^2 - 4x - 5 = 0$ cu $x_1 = -1$, $x_2 = 5$.

1.5A Pentru ecuaţiile $x^2 + px + 1 = 0$, $x^2 + x + p = 0$, notând rădăcinile cu x_1, x_2 respectiv x_1', x_2', condiţia din enunţ se scrie $x_1^2 + x_2^2 = (x_1')^2 + (x_2')^2$ deci $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (x_1' + x_2')^2 - 2x_1'x_2'$ sau folosind relaţiile lui Viette: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = 1$, $x_1' + x_2' = -1$, $x_1'x_2' = p$ se obţine $p^2 - 2 = 1 - 2p$, $p^2 + 2p - 3 = 0$ cu soluţiile $p_1 = 1$, $p_2 = -3$.

1.6A Ecuaţia $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x+4} = 0$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-4, -3, -1, 0\}$ se poate scrie $\dfrac{2x + 4}{x(x + 4)} + \dfrac{2x + 4}{(x + 1)(x + 3)} = 0$, deci $(2x + 4)[2x^2 + 8x + 3] = 0$

cu rădăcinile $x_1=-2$, $x_{2,3}=-2\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

1.7A Condiţia din enunţ, $x_1<2<x_2$ pentru ecuaţia $ax^2+bx+c=0$ se dă $\Delta>0$, $af(2)<0$ unde $a=m-1$: $\Delta=4(m-2)^2-4(m-1)(m-4)>0$, $(m-1)f(2)=(m-1)[4(m-1)-4(m-2)+m-4]=(m-1)m<0$ sau $\Delta=4m>0$, $(m-1)m<0$ deci $m\in(0,1)$.

1.8A Notând $\sqrt[3]{x-1}=t$, ecuaţia $\sqrt[3]{x-1}-x=-1$ se scrie $t^3-t=0$; $t_1=0$, $t_2=1$, $t_3=-1\Rightarrow x-1=0$, $x-1=1$, $x-1=-1$ deci $x\in\{0,1,2\}$. Altfel: $(\sqrt[3]{x-1})^3-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{x-1}[(\sqrt[3]{x-1})^2-1]=0$.

1.9A Cu condiţia $x\geq 8$, ecuaţia $\sqrt{x-8}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2x-10}$ se scrie $\sqrt{(x-8)(x-2)}=0$ deci $x=8$.

1.10A Pentru $2x-1\geq 0$, $x\geq\frac{1}{2}$ din $x+\sqrt{x^2-2x+1}=1\Rightarrow|x-1|=-x+1$, deci $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

1.11A Sistemul $\frac{xyz}{y+z}=\frac{np}{n+p}$, $\frac{xyz}{z+x}=\frac{mp}{m+p}$, $\frac{xyz}{x+y}=\frac{mn}{m+n}$ se poate scrie succesiv $\frac{y+z}{xyz}=\frac{n+p}{np}$, $\frac{z+x}{xyz}=\frac{m+p}{mp}$, $\frac{x+y}{xyz}=\frac{m+n}{mn}$, $\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{n}+\frac{1}{p}$, $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}=\frac{1}{p}+\frac{1}{m}$, $\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$. Adunând toate ecuaţiile rezultă $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}$ de unde $\frac{1}{yz}=\frac{1}{m}$, $\frac{1}{xz}=\frac{1}{n}$, $\frac{1}{xy}=\frac{1}{p}$ sau $yz=m$, $xz=n$, $xy=p$. Prin înmulţirea tuturor rezultă $(xyz)^2=mnp>0$ $xyz=\pm\sqrt{mnp}$ deci $x=\pm\frac{\sqrt{mnp}}{m}$, $y=\pm\frac{\sqrt{mnp}}{n}$, $z=\pm\frac{\sqrt{mnp}}{p}$.

1.12A Prin adunarea tuturor relaţiilor $x+y+z=d$, $y+z+t=a$, $z+t+x=b$, $t+x+y=c$ obţinem $x+y+z+t=\frac{1}{3}(a+b+c+d)$ de unde scăzând pe fiecare rezultă $x=\frac{1}{3}(-2a+b+c+d)$, $y=\frac{1}{3}(a-2b+c+d)$, $z=\frac{1}{3}(a+b-2c+d)$, $t=\frac{1}{3}(a+b+c-2d)$.

1.13A Egalităţile $x+y+z=14$, $x^2+y^2+z^2=98$ ne dau $xy+xz+yz=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=49$

1.14A Dacă $f(x)=2x-3$ şi $g(x)=3x-2$, $A=\{x|f(x)g(x)\geq 0\}$, $B=\{x|f(x)/g(x)\geq 0\}$ atunci $B\subset A$ deoarece $x=\frac{2}{3}\in A$, dar $\frac{2}{3}\notin B$.

1.15A $A=\{x\in\mathbf{R}|x^2-x>12\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}|x(x-2)>8\}$, $C=\{x\in\mathbf{R}|x^2-x-2>0\}\Rightarrow A\subset B\cap C$: $A=(-\infty,-3)\cup(4,\infty)$, $B=(-\infty,-2)\cup(4,\infty)$, $C=(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$. $A\subset B\subset C=B\cap C$.

1.16A $|x-1|-3|x+1|=6\Rightarrow x\in\emptyset$: $x\leq-1\Rightarrow -x+1-3(-x-1)=6$, $x=1$,

$-1<x\leq 1\Rightarrow -x+1-3(x+1)=6$, $x=-2$; $1<x\Rightarrow x-1-3(x+1)=6$, $x=-5$, deci $x\in\emptyset$.

1.17A $A=\left\{x\in\mathbf{R}|2x+3\geq 0\ \text{ şi }\ \frac{x-2}{x(x-3)}<0\right\}=\left[-\frac{3}{2},\infty\right)\cap[(-\infty,0)\cup(2,3)]=\left[-\frac{3}{2},0\right)\cup(2,3)$.

1.18A $A=\left\{\sum_{k=1}^{n^2+4n+3}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}|n\in\mathbf{N}\right\}=-\sum_{k=1}^{m=n^2+4n+3}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})=-(\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{m-1}-\sqrt{m}+\sqrt{m}-\sqrt{m+1})=\sqrt{m+1}-1=\sqrt{(n+2)^2}-1=n+1$, deci $A=\mathbf{N}^*$.

1.19A Cât este $m=\inf A$, $M=\sup A$ dacă $A=\left\{\frac{9+x^2}{9-x^2}|x\in(-1,2)\right\}$? Schiţând graficul lui $f(x)=\frac{9+x^2}{9-x^2}$ pe $(-3,3)$ ($\lim_{x\to\pm3}f(x)=+\infty$, f descreşte pe $(-3,0]$ creşte pe $[0,3)$). $f(-1)=\frac{5}{4}$, $f(0)=1$, $f(2)=\frac{13}{5}$ deci $m=1$, $M=\frac{13}{5}$.

1.20A Funcţia $f:(-2,0)\cup(2,\infty)\to[-4,\infty)$, $f(x)=x^2-4$ nu este bijectivă (este injectivă) deoarece f nu este surjectivă, -4 şi 0 nu aparţin imaginii lui f.

1.21A Pentru funcţia $f(x)=2\sqrt{x(5-x)}$, $M=\max\limits_{x\in[0,5]}f(x)$, $m=\min\limits_{x\in[0,5]}f(x)$, sunt $M=5$, $m=0$ (M şi m se obţin pentru $x=\frac{5}{2}$ şi $x=0$, $x=5$ ca şi pentru $g(x)=x(5-x)=y$ parabolă cu vârful $x=\frac{5}{2}$)(vezi **2.781A**).

1.22A $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}<2\Rightarrow x\in\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$, domeniul $\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right]$; pentru $x<0\Rightarrow 2x^2-x>0$ deci $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right)$ iar pentru $0<x$, $2x^2-x<0$, $0<x<\frac{1}{2}$.

1.23A Graficele funcţiilor $f(x)=mx^2-2(m+2)x-1$ şi $g(x)=x^2-2x+m$ au două puncte comune distincte dacă ecuaţia $f(x)=g(x)$ are discriminantul $\Delta>0$: $(m-1)x^2-2(m+1)x-(m-1)=0$, $\Delta=2m(m+1)>0$, $m\in(-\infty,-1)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$ ($m=1\Rightarrow x_1=x_2=-\frac{1}{2}$).

1.24A $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{mx^2-(m-1)x+m-1}$ este corect definită dacă $mx^2-(m-1)x+m-1\geq 0$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$ deci $\Delta=-3m^2+2m+1\leq 0$, $m>0\Rightarrow m\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup[1,\infty)$, $m>0$ deci $m\in[1,\infty)$.

1.25A $(x^2-5x)(x^2-6x+8)\leq 0$ dacă $x\in[0,2]\cup[4,5]$ deoarece acolo trinoamele x^2-5x şi x^2-6x+8 au semne contrare: $[0,5]\cap\{(-\infty,2]\cup[4,\infty)\}$.

1.26A Ecuaţia $x^2-3|x|-4=0$ are soluţiile $x=\pm4$: $x<0\Rightarrow x^2+3x-4=0$ deci $x=-4$, $x>0\Rightarrow x^2-3x-4=0$ deci $x=4$.

1.27A Valoarea lui $a\in\mathbf{R}$ astfel încât $f:[4,\infty)\to[a,\infty)$, $f(x)=x-5-2\sqrt{x-4}$ să fie surjectivă este $a=2$; $f(x)=(\sqrt{x-4}-1)^2-2\geq-2$.

1.28A În sistemul $|x-2|+|y+3|=4$, $x=2+|y+3|$ observăm că $x-2=|y+3|=|x-2|$ (deoarece $x-2\geq 0$) deci $|x-2|=2$, $|y+3|=2$ $x-2=\pm 2$, $y+3=\pm 2$, $x=2\pm 2$, $y=-3\pm 2$ de unde $x_1=0$, $x_2=4$, $y_1=-1$, $y_2=-5$. Dar $x=0$ nu este soluţie şi avem $x=4$, $y=-1$ sau $x=4$ şi $y=-5$.

1.29A Ecuaţia $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$ se scrie $[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]=120$, $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=120$. Notăm $x^2+5x+4=t$; $t(t+2)=120$, $t_1=-12$, $t_2=10$ de unde rezultă $x=1$, $x=-6$.

1.30A Inecuaţia $\sqrt{6-x}>x$ $(x<6)$ este evidentă pentru $x\leq 0$; dacă $x>0$ obţinem $6-x>x^2$, $x\in(0,2)$ deci soluţia este $A=\{x, x<2\}$.

1.31A În fiecare din ecuaţiile $x^3+3=0$, $x^4+4=0$, $x^5+5=0$ coeficienţii termenilor x^2 respectiv x^3 sau x^4 sunt zero deci suma tuturor rădăcinilor fiecăreia este zero. Rădăcinile reale sunt $x_1=-\sqrt[3]{3}$ (pentru $x^3+3=0$) şi $x_2=-\sqrt[5]{5}$ (pentru $x^5+5=0$), deci suma celor complexe este $\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}$.

1.32A Expresia E se scrie

$$E=\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)=$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\sqrt{xy}}\left[\frac{x+y}{\sqrt{xy}}+2\right]=\frac{1}{xy}$$

1.33A $E=\frac{1}{\sqrt{abc}-2}\cdot\sqrt{\frac{abc+4}{a}-4\sqrt{\frac{bc}{a}}}$ $(a,b,c>0)$, $\sqrt{abc}>2)$ este

$$E=\frac{1}{\sqrt{abc}-2}\cdot\sqrt{\frac{abc-4\sqrt{abc}+4}{a}}=\frac{1}{\sqrt{abc}-2}\cdot\frac{\sqrt{(\sqrt{abc}-2)^2}}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

1.34A În inecuaţia $5x^2-20x+26>\dfrac{4}{x^2-4x+5}$, notăm $x^2-4x+5=t>0$ şi obţinem $5t+1>\dfrac{4}{t}$, $5t^2+t-4>0$, $t<-1$, $\dfrac{4}{5}<t$ şi deci rămâne $\dfrac{4}{5}<t=x^2-4x+5$, $5x^2-20x+21>0$. Deoarece $\Delta<0$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$ verifică.

1.35A Să se determine m astfel ca $x^2+y^2-8x-8y+m>0$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$: $(x-4)^2+(y-4)^2+m-32>0$ deci $m-32>0$, $m>32$.

1.36A Valorile parametrului m pentru care vârfurile parabolelor $y=x^2+2(m-1)x+m-1$ sunt deasupra axei Ox, adică $y_V>0$ $y_V=f(x_V)$, $x_V=-\dfrac{b}{2a}=-(m-1)$, $V(x_V,y_V)$ sunt vârfurile parabolelor. Deci $y_V=-m^2+3m-2>0$, $m^2-3m+2<0$, $m_{1,2}=1,2$, $m\in(1,2)$.

1.37A Valoarea expresiei $E=x^2+y^2+z^2$, unde (x,y,z) este soluţia sistemului $\begin{cases} x+y+z=2 \\ xy+xz+yz=0 \end{cases}$: $E=(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=4$.

1.38A Soluţiile pozitive ale sistemului $x\sqrt[3]{yzt}=1$, $y\sqrt[3]{xzt}=4$, $z\sqrt[3]{xyt}=9$, $t\sqrt[3]{xyz}=16$. Înmulţim toate ecuaţiile $xyzt\sqrt[3]{(xyzt)^3}=1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\Rightarrow$ $xyzt=4!$ şi $x^2(xyzt)=1^6$, $y^2(xyzt)=2^6$, $z^2(xyzt)=3^6$, $t^2(xyzt)=4^6$ deci $x=\dfrac{1^3}{\sqrt{4!}}$, $y=\dfrac{2^3}{\sqrt{4!}}$, $z=\dfrac{3^3}{\sqrt{4!}}$, $t=\dfrac{4^3}{\sqrt{4!}}$.

1.39A Soluţiile sistemului: $u+v=2$, $ux+vy=1$, $ux^2+vy^2=-1$, $ux^3+vy^3=-5$: primele două ecuaţii ne dau $u=\dfrac{1-2y}{x-y}$, $v=-\dfrac{1-2x}{x-y}$ şi înlocuim în ultime două: $x^2\dfrac{1-2y}{x-y}-y^2\dfrac{1-2x}{x-y}=-1$, $x^3\dfrac{1-2y}{x-y}-y^3\dfrac{1-2x}{x-y}=-5\Rightarrow\dfrac{1}{x-y}[x^2-y^2-2xy(x-y)]=-1$, $\dfrac{1}{x-y}[x^3-y^3-2xy(x^2-y^2)]=5$ sau $x+y-2xy=-1$, $(x+y)^2-3xy-2xy(x+y)=-5$. Sistemul $s-2p=-1$, $s^2-3p-2ps=-5$ are soluţia $s=3$, $p=2$ deci $x=1$, $y=2$ sau $x=2$, $y=1$ de unde $u=3$, $v=-1$ sau $u=-1$, $v=3$ deci soluţiile sunt $(x,y,u,v):(1,2,3,-1)$ şi $(2,1,-1,3)$.

1.40A Ordinea crescătoare a numerelor $x=\sqrt{3}-1$, $y=\sqrt{5}-\sqrt{2}$, $z=1+\sqrt{2}$: evident $z>x$, $z>y$ iar $x>y\Rightarrow\sqrt{3}-1>\sqrt{5}-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}+\sqrt{2}>1+\sqrt{5}$, $5+2\sqrt{6}>6+2\sqrt{5}$, $2(\sqrt{6}-\sqrt{5})>1$, $4(11-2\sqrt{30})>1$, $43>8\sqrt{30}$, $43^2>64.30$ fals, deci $x<y$.

1.41A Ordinea crescătoare a numerelor $A=\sqrt{6}$, $B=\sqrt[4]{12}$, $C=\sqrt[3]{8}$, $D=\sqrt[6]{20}$: le aducem la acelaşi indice, $A=\sqrt[12]{6^6}=\sqrt[12]{2^6\cdot 3^6}$, $B=\sqrt[12]{12^3}=\sqrt[12]{2^6\cdot 3^3}$, $C=\sqrt[12]{8^4}=\sqrt[12]{2^{12}}$, $D=\sqrt[12]{20^2}=\sqrt[12]{2^4\cdot 5^2}$ deci ordinea este $D<B<C<A$.

1.42A Numerele $x=\dfrac{17}{6}$ şi $y=2,8(3)$ sunt egale deoarece împărţind pe 17 la 6 obţinem $2,83333\ldots=2,8(3)$.

1.43A Fiind date mulţimile $A=\{x\in\mathbf{R}|2x-1<3x+2\}=\{x\in\mathbf{R}|-3<x\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}|3x+2\leq x+5\}=\left\{x\in\mathbf{R}, x\leq\dfrac{3}{2}\right\}$ avem $A\cap B=\left(-3,\dfrac{3}{2}\right]$.

1.44A Valorile parametrului $a\in\mathbf{R}$ pentru care mulţimea $A=\{x\in\mathbf{R}|x^2+ax=0\}$ este formată dintr-un singur element este $a=0$ deoarece soluţiile ecuaţiei $x^2+ax=0$ sunt $x_1=0$, $x_2=-a$ deci $x_1=x_2=0=-a\Rightarrow a=0$.

1.45A Graficul funcţiei $f(x)=x^2-(a+3)x+a^2$ taie axa Ox în două puncte distincte dacă rădăcinile ecuaţiei asociate $x^2-(a+3)x+a^2=0$ sunt reale şi distincte, deci discriminantul $\Delta>0$, $\Delta=(a+3)^2-4a^2=-3a^2+6a+9>0$, $3a^2-6a-9<0$, $a_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+27}}{3}$ deci $a\in(-1,3)$.

1.46A Inecuaţia $\dfrac{x^2-16}{x}\leq 0$, $x\neq 0$ are soluţia $A=(-\infty,-4]\cup(0,4]$.

$1 + \frac{3}{x+1}$ deci $x+1 = \pm 1$, $x+1 = \pm 3$, $x = -1 \pm 1$, $x = -1 \pm 3$ şi rezultă $A = \{-4, -2, 0, 2\}$. Se poate verifica şi direct grila.

1.70A Să se determine mulţimea $A = \{x \in \mathbf{N} | x = \frac{4n}{n+2}, n \in \mathbf{N}\}$; $x = \frac{4n}{n+2} = \frac{4n+8-8}{n+2} = 4 - \frac{8}{n+2}$ şi alegem din $n+2 = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$, $A = \{0, 2, 6\}$.

1.71A Găsiţi patru numere naturale consecutive x, y, z, w în această ordine care verifică $x^3 + y^3 + z^3 = w^3$. Singurele care verifică sunt 3,4,5,6.

1.72A Ordinea crescătoare a numerelor $x = \sqrt{6}$, $y = \sqrt[4]{12}$, $z = \sqrt[8]{72}$ este $z < y < x$. Aducem la acelaşi indice $x = \sqrt[8]{6^4}$, $y = \sqrt[8]{12^2}$, $z = \sqrt[8]{72}$ şi $72 < 144 < 36^2$.

1.73A Funcţiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x+2$, $g(x) = 3|x|+2$ sunt f bijectivă, g nu este bijectivă: f este crescătoare, $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$, $\mathrm{Im} g = \{y, y \geq 2\}$, g nu este injectivă, $g(-x) = g(x)$.

1.74A Ecuaţia $x^2 + x + m = 0$ are rădăcini reale şi distincte dacă $\Delta = 1 - 4m > 0$ deci $m < \frac{1}{4}$.

1.75A Pentru ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ cu soluţiile x_1, x_2 şi $s = x_1 + x_2$, $p = x_1 x_2$ expresia $d = |x_1 - x_2|$ în funcţie de s şi p este $d = \sqrt{s^2 - 4p}$: $d = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{s^2 - 4p}$.

1.76A Imaginea funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{4}$ este $\mathrm{Im} f = [-2, \infty)$: $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 2 \geq -2$.

1.77A Soluţiile sistemului $x(x+y+z+t) = 10$, $y(x+y+z+t) = 20$, $z(x+y+z+t) = 30$, $t(x+y+z+t) = 40$ sunt $x = \pm 1$, $y = \pm 2$, $z = \pm 3$, $t = \pm 4$: adunăm toate ecuaţiile $(x+y+z+t)^2 = 100$, $x+y+z+t = \pm 10$ şi înlocuind în fiecare ecuaţie rezultă $x = \pm 1$, $y = \pm 2$, $z = \pm 3$, $t = \pm 4$.

1.78A Valorile parametrului real m pentru care ecuaţia $\frac{x(x+1)}{x+2} = m$ are soluţii reale de semne contrare sunt $m > 0$: condiţiile sunt pentru ecuaţia $x^2 + x(1-m) - 2m = 0$, $\Delta = m^2 + 6m + 1 > 0$, $P = x_1 x_2 = -2m < 0$, $m \in [(-\infty, -3 - 2\sqrt{2}) \cup (-3 + 2\sqrt{2}, \infty)] \cap (0, \infty) = (0, \infty)$.

1.79A Dacă $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $\alpha = a + b$, $\beta = a - b$ să fie raţionale atunci $a = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $b = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ sunt raţionale, $a \in Q$, $b \in Q$.

1.80A Soluţia ecuaţiei $|6 - x| = 2x + 3$ este $x = 1$: $6 - x = \pm(2x+3)$, $x = 1$, $x = -9$ dar $x = -9$ nu verifică ecuaţia.

1.81A Valorile lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care rădăcinile x_1, x_2 ale ecuaţiei $x^2 - (m+1)x + m = 0$ satisface relaţia $|x_1 - x_2| = 1$ sunt $\{0, 2\}$: $x_1 + x_2 = m+1$, $x_1 x_2 = m$, $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{(m+1)^2 - 4m} = |m - 1| = 1$ deci $m = 0$ sau $m = 2$, $m \in \{0, 2\}$.

1.82A Soluţiile inecuaţiei $|x^2 - x - 2| \leq 1$ echivalentă cu inecuaţiile $-1 \leq x^2 - x - 2 \leq +1$ adică $0 \leq x^2 - x - 1$, $x^2 - x - 3 \leq 0$ sunt date de

$x \in \left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$.

1.83A Mulţimea S a soluţiilor sistemului $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$: $x^2 + y^2 = 5$, $xy = -2$ sau $x + y = \pm 1$, $xy = -2$ ne dau soluţiile $S = \{(1, -2), (-2, 1), (-1, 2), (2, -1)\}$.

1.84A Soluţiile sistemului $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 + 2y^2 - xy = 7 \end{cases}$ sunt $(1, 2)$ şi $(\frac{11}{4}, \frac{9}{8})$: $x = 5 - 2y$, $(5 - 2y)^2 + 2y^2 - y(5 - 2y) = 7$, $8y^2 - 25y + 18 = 0$, $y_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ \frac{9}{8} \end{cases}$, $x_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ \frac{11}{4} \end{cases}$.

1.85A Imaginea funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ este $\mathrm{Im} f = [-1, 1]$. $\frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (x-1)^2$ iar $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow -(x-1) \leq 0$ sau $\sin 2t = \frac{2\mathrm{tg} t}{1+\mathrm{tg}^2 t}$. Altfel: $\frac{2x}{1+x^2} = y$, $yx^2 - 2x + y = 0$, $\Delta y = 1 - y^2 \geq 0$, $|y| \leq 1$.

1.86B Pentru $a > 0$ mulţimea $B = \left\{x \in \mathbf{R} | \frac{1}{x}\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1}\right\} = (0, a]$: avem egalitatea $\frac{1}{x}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{|x|}\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1}$, deoarece pentru $x > 0$, $x = |x| = \sqrt{x^2}$.

1.87B Fie $M = \{(a, b) \in Q^2 | \sqrt{a - \sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}\}$ şi $k \in N$ numărul elementelor mulţimii M. Avem $M = \emptyset$: $a - \sqrt{3} = a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{3} \Rightarrow a = a^2 + 3b^3$, $2ab = -1$, $12b^4 + 1 = -2b$; dar evident $-2b < 12b^4 + 1$ $(\forall) b \in \mathbf{R}$ sau altfel $b = -\frac{1}{2a}$, $a = a^2 + 3\left(-\frac{1}{2a}\right)^2$, $4a^4 - 4a^3 + 3 = 0$; ultima ecuaţie nu are nici o rădăcină reală deoarece $f(a) = 4a^4 - 4a^3 + 3$, cu derivata $f'(a) = 16a^3 - 12a^2$ are $a = 0$ rădăcină dublă (punct de inflexiune) şi un minim în $a = \frac{3}{4}$, unde $f\left(\frac{3}{4}\right) = 4\left(\frac{3}{4}\right)^4 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^3 + 3 = -\left(\frac{3}{4}\right)^3 + 3 > 0$.

1.88B Mulţimea $M = \{x \in \mathbf{R} | \sqrt{1 + \sqrt{2x - x^2}} + \sqrt{1 - \sqrt{2x - x^2}} = \sqrt{4 - 2x}\} = \{1\}$. Domeniul de definiţie al egalităţii este [0,2] deoarece pe [0,2] $1 - \sqrt{2x - x^2} = \frac{(1-x)^2}{1 + \sqrt{2x - x^2}} > 0$. Ridicăm la pătrat, obţinem $2 + |1 - x| = 2(2 - x)$: dacă $x \in [0, 1]$, $|1 - x| = 1 - x$, $2 + 1 - x = 4 - 2x \Rightarrow x = 1$ iar pentru $x \in [1, 2]$, $|1 - x| = x - 1$, $2 + x - 1 = 4 - 2x$, $x = 1$, deci $M \setminus [0, 1] = \emptyset$.

1.89B Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^5 + (a^2 + 1)x^3 + a + 2$ este surjectivă pentru $\forall a \in \mathbf{R}$ deoarece pentru $a > 0$, $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$ polinoamele sunt continue deci $\mathrm{Im} f = \mathbf{R}$; analog pentru $a < 0$.

1.90B Dacă x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - 2x + 5 = 0$ atunci expresia

$E = \frac{x_1^3-x_1^2+2x_1+4}{x_1^3-x_1^2+3x_1+3} + \frac{x_2^3-x_2^2+2x_2+4}{x_2^3-x_2^2+3x_2+3}$ este egală cu 2. Avem evident egalitățile $x_1^2-2x_1+5=0$, $x_2^2-2x_2+5=0$, $x_1^3-2x_1^2+5x_1=0$, $x_2^3-2x_2^2+5x_2=0$ și ordonând convenabil termenii putem scrie $x_1^3-x_1^2+2x_1+4=(x_1^3-2x_1^2+5x_1)+(x_1^2-2x_1+5)-x_1-1=-x_1-1$, analog $x_2^3-x_2^2+2x_2+4=-x_2-1$, $x_1^3-x_1^2+3x_1+3=(x_1^3-2x_1^2+5x_1)+(x_1^2-2x_1+5)-2=-2$, $x_2^3-x_2^2+3x_2+3=-2$ deci $E=\frac{-x_1-1}{-2}+\frac{-x_2-1}{-2}=\frac{x_1+x_2}{2}+1=2$.

1.91B Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt soluțiile ecuației $2x^4+3x^3-3x^2-3x+2=0$ atunci $S=|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|=\sqrt5+\frac{\sqrt{17}}{2}\in(4,5)$. Ecuația este reciprocă, împărțim prin x^2, $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\frac1x\right)-3=0$, facem substituția $x-\frac1x=t$, obținem $2(t^2+2)+3t-3=0$, $2t^2+3t+1=0$, $t_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{-3\pm1}{4}\Rightarrow -1,-\frac12$, $x-\frac1x=-1$, $x-\frac1x=-\frac12$ dau rădăcinile $x_1=\frac{-1-\sqrt5}{2}$, $x_2=\frac{-1+\sqrt5}{2}$, $x_3=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$, $x_4=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ deci $S=\sqrt5+\frac{\sqrt{17}}{2}\in(4,5)$.

1.92B Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ are proprietatea $f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy$ atunci $\alpha=f(3)=9$: avem $f(0)=f(0)+f(0)$ deci $f(0)=0$ iar pentru $x=y=3$ rezultă $f(0)=0=f(3)+f(3)-18$, $f(3)=9$.

1.93B Mulțimile $A=\{x\in\mathbf{R}|x^2+2ax+b=0, a,b\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}|x^2+2bx+a=0, a,b\in\mathbf{Z}\}$, $K=$ numărul elementelor mulțimii și $M=\{(a,b)\in\mathbf{Z}^2|A\cap B$ are exact un element $\}$. Atunci $M=\emptyset$. $(x_0^2+2ax_0+b)-(x_0^2+2bx_0+a)=0\Rightarrow(a-b)(2x_0-1)=0$; dacă $a=b$, $A\cap B$ are două elemente deci $a\neq b$ și $x_0=\frac12$, $a+b=-\frac14$ dar $a,b\in\mathbf{Z}\Rightarrow a+b\in\mathbf{Z}$ și relația $a+b=-\frac14$ este imposibilă, deci $M=\emptyset$.

1.94B Mulțimea M a valorilor lui $m\in\mathbf{R}$ pentru care $-7<\frac{x^2+(m+1)x-5}{x^2-x+1}<3$ $(\forall)x\in\mathbf{R}$: rezultă inegalitățile $0<8x^2+(m-6)x+2$, $0<2x^2-(m+4)x+8$, $\forall x\in\mathbf{R}$ deci $\Delta_1=(m-6)^2-64<0$, $\Delta_2=(m+4)^2-64<0\Rightarrow -8<m-6<8$, $-8<m+4<8\Rightarrow -2<m<14$, $-12<m<4$ deci $(-2,4)=M$.

1.95B Ecuația $\sqrt[5]{2x+1+2\sqrt{x^2+x}}+\sqrt[5]{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}=2$ are o soluție, $x=0$. Observăm că $\sqrt[5]{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}=\frac{1}{\sqrt[5]{2x+1+2\sqrt{x^2+x}}}=t$ deci $t+\frac1t=2$ de unde $t=1$, $2x+1-2\sqrt{x^2+x}=1$, $x=\sqrt{x^2+x}$ deci $x=0$.

1.96B Dacă $A=\{a\in\mathbf{R}|\sqrt{x^2+1}\le ax, (\forall)x\in\left[\frac12,1\right]\}$, atunci $A=[\sqrt5,\infty)$: avem succesiv $\frac12\le x\le1$, $\frac14\le x^2\le1$, $1\le\frac{1}{x^2}\le4$, $2\le\frac{1}{x^2}+1\le5$ deci $\sqrt2\le\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\le\sqrt5\le a$, $a>0$, deci $A=[\sqrt5,\infty)$.

1.97B Fie ecuația $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}}=a$ și A mulțimea acelor $a\in\mathbf{R}$ pentru care ecuația are două soluții reale distincte. Atunci $A=(1,5]$. Ecuația se scrie $\sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-4}-3)^2}=a$, $|\sqrt{x-4}-2|+$

$|\sqrt{x-4}-3|=a$, $x>4$. Luând separat cazurile $\sqrt{x-4}\le2$, $2\le\sqrt{x-4}\le3$, $3\le\sqrt{x-4}$ rezultă $A=(1,5]$.

1.98B Ecuația $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x}}=x-1$ are o singură rădăcină $x=\frac{1+\sqrt2}{2}$: condiții de existență $x\ge1$, $x^4-x-1<0$, $2x-x^2\le0$ deci $x\le2$. După două ridicări la pătrat, $1-\sqrt{x^4-x}=x^2-2x+1$, $(2x-x^2)^2=(\sqrt{x^4-x})^2$, $4x^3-4x^2-x=0$ cu singura soluție convenabilă $x=\frac{1+\sqrt2}{2}$ (care înlocuită în ecuația inițială o verifică).

1.99B $f:Q\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x^2+ax+2$ este injectivă pentru $a\in\mathbf{R}\setminus Q$ (deci a irațional): $f(x_1)=2x_1^2+ax_1+2=2x_2^2+ax_2+2=f(x_2)\Rightarrow 2(x_1^2-x_2^2)+a(x_1-x_2)=0$, $(x_1-x_2)[2(x_1+x_2)+a]=0$: f este injectivă dacă $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ sau $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$. Dacă $a\in\mathbf{R}\setminus Q$ atunci egalitatea $x_1+x_2=-\frac a2$ este imposibilă (deoarece $x_1+x_2\in Q$) deci f este injectivă dacă a este irațional.

1.100B Dacă S este suma soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt{9+x}=8$, atunci $S=16$. Condiții: $x\in[-9,97]$. Notăm $\sqrt[4]{97-x}=u\ge0$, $\sqrt{9+x}=v\ge0$ și rezultă $u+v=8$, $u^4+v^2=106$, $u^4+u^2-16u-42=0$ (avem $(u-3)(u^3+3u^2+10u+14)=0$) cu singura soluție pozitivă $u=3$ deci $x=16$. Altfel se observă direct că $x=16$ este soluție ($\sqrt[4]{97-16}=3$, $\sqrt{9+16}=5$) și rezultă că este unică intersectând $y=\sqrt[4]{97-x}$, $y=8-\sqrt{9+x}$.

1.101B Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le0\\ x+1, & x>0\end{cases}$ este o bijecție deoarece $\mathrm{Im}f=\mathbf{R}$ ($f(-\infty)=-\infty$, $f(+\infty)=+\infty$) f este strict crescătoare (reuniunea a două semidrepte de pante 2 și 1, $f(-0)=f(+0)=1$) deci injectivă (se verifică și direct că $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$, o relație de forma $x_1+1=2x_2+1$ cu $x_1>0$, $x_2\le0$ este imposibilă deoarece $x_1=2x_2$).

1.102B Fie $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-2$, $g(x)=x+1$. f nu este nici injectivă nici surjectivă ($y=f(x)$ reprezintă o parabolă) deci nu este inversabilă, $(g\circ f)(x)=x^2-1\neq(x+1)^2-2$, $(f\circ g)(x)=g^2(x)-2=(x+1)^2-2=x^2+2x-1$ nu este bijecție. Evident $\mathrm{Im}f=\{y, y=x^2-2, y\ge-2\}=[-2,\infty)$.

1.103B Dacă mulțimea A are n elemente și $a\in A$, atunci numărul m al submulțimilor lui A care nu conține pe a este $m=2^{n-1}$: submulțimile sunt, mulțimea vidă C_{n-1}^0 mulțimile formate dintr-un element C_{n-1}^1 din două elemente C_{n-1}^2 din 3 elemente $C_n^3\ldots$ din $n-2$ și din $n-1$ elemente, $C_{n-1}^{n-2}, C_{n-1}^{n-1}$ deci $m=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+C_{n-1}^3+\ldots+C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1}=2^{n-1}$.

1.104B Dacă $A=\{x\in\mathbf{R}|\sqrt{2x-1}<\sqrt{3x+2}\}$ și $B=\{x\in\mathbf{R}|\sqrt{3x+2}\le\sqrt{x+5}\}$ atunci $A\cup B=\left[-\frac23,\infty\right)$: $A=\left[\frac12,\infty\right)\cap(-3,\infty)=\left[\frac12,\infty\right)$, $B=\left[-\frac23,\infty\right)\cap\left(-\infty,\frac32\right]=\left[-\frac23,\frac32\right]$ deci $A\cup B=\left[-\frac23,\infty\right)$.

1.105B Mulţimea valorilor $m \in \mathbf{R}$ astfel încât $x_1^2 + x_2^2 > m - 4$ unde $x_{1,2}$ sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - mx + 2 = 0$ este $m \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$; $x_1 + x_2 = m$, $x_1 \cdot x_2 = 2$, $x_1^2 + x_2^2 = (x + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 4 > m - 4 \Rightarrow m^2 - m > 0$, $m_1 = 0$, $m_2 = 1 \Rightarrow m \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

1.106B Idem ca în 1.105B pentru ecuaţia $2x^2 + 2(m+2)x + m^2 + 4m + 3 = 0$ cu condiţia $|x_1 + x_2 + 3x_1x_2| < 1$. R. $x_1 + x_2 = -(m+2)$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}(m^2 + 4m + 3)$, $|x_1 + x_2 + 3x_1x_2| = |-(m+2) + \frac{3}{2}(m^2 + 4m + 3)| = \frac{1}{2}|3m^2 + 10m + 5| < 1 \Rightarrow -2 < 3m^2 + 10m + 5 < 2 \Leftrightarrow 0 < 3m^2 + 10m + 7$, $3m^2 + 10m + 3 < 0$ avem $\left[\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right) \cup (-1, \infty)\right] \cap \left(-3, -\frac{1}{3}\right) = \left(-3, -\frac{7}{3}\right) \cup \left(-1, -\frac{1}{3}\right) \ni m$.

1.107B Mulţimea valorilor $m \in \mathbf{R}$ astfel ca ecuaţia $x^2 + mx - 2 = 0$ să aibă ambele rădăcini în intervalul $(-1, 2)$ este $m \in \emptyset$. Facem schimbarea de variabilă $y = \frac{x-2}{x+1}$ şi pentru $x \in (-1, 2)$ y ia valori negative, deci rădăcinile ecuaţiei în y transformate, $y_1 = \frac{x_1-2}{x_1+1}$, $y_2 = \frac{x_2-2}{x_2+1}$ sunt ambele negative, $y_1, y_2 < 0$ deci condiţiile sunt $\Delta \geq 0$, $S = y_1 + y_2 < 0$, $P = y_1y_2 > 0$ pentru ecuaţia în $y : x = -\frac{y+2}{y-1}$, $\left(\frac{y+2}{y-1}\right)^2 - m\frac{y-2}{y-1} - 2 = 0$, $(m+1)y^2 + (m-8)y - 2(m+1) = 0$, $\Delta = (m-8)^2 + 8(m+1)^2 \geq 0$, $S = -\frac{m-8}{m+1} < 0$, $P = -2 > 0$ (fals) deci $m \in \emptyset$.

1.108B Valorile lui $a \in \mathbf{R}$ astfel încât pentru $f(x) = (a+1)x^2 - ax + a - 2$ să avem $f(x) < 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Condiţiile sunt $\Delta < 0$ (semn constant) şi $a + 1 < 0$, $3a^2 - 4a - 8 > 0$ şi $a < -1$, deci $a < \frac{2-\sqrt{28}}{3}$.

1.109B Expresia $E(x, m) = m3^{2x} - 2(m-1)3^x + m - 3$, $x \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{R}^*$ este negativă pentru orice $x \in \mathbf{R}$ pe mulţimea $M = \{m \in \mathbf{R}^*, E(m, x) < 0\} = (-\infty, -1)$. Condiţiile sunt $\Delta < 0, m < 0 : \Delta = (m-1)^2 - m(m-3) = m + 1 < 0$ deci $m < -1$. Lui $m = -1$ îi corespunde $3^x = t = 2$ ($x = \log_3 2$); mulţimea $(-\infty, -1)$ obţinută pentru trinomul $mt^2 - 2(m-1)t + m - 3$ unde $t \in \mathbf{R}$ rămâne aceeaşi şi pentru $t > 0$, $t = 3^x$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$, $m(t-1)^2 + 2t - 3 < 0$.

1.110B Mulţimea valorilor (imaginea) $\mathrm{Im}f$ pentru $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = x^2 + 2x - 2$ este $\mathrm{Im}f = [-3, +\infty)$ deoarece $y = f(x) = (x+1)^2 - 3 \geq -3$.

1.111B Funcţiile $f_\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_\lambda(x) = \lambda x^2 + x + 1 - \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$ au graficele ce trec prin aceleaşi puncte $(1,2)$, $(-1,0)$: $\lambda(x^2 - 1) + x + 1 - y \equiv 0$ în λ deci verificată pentru orice λ (polinom identic nul în λ) $\Rightarrow x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$, $x + 1 - y = 0$ deci punctele $(1,2)$ şi $(-1,0)$.

1.112B Pentru ce valori $\alpha \in \mathbf{R}$ sistemul $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = \alpha \end{cases}$ are patru soluţii: $|x| + |y| = 1$ ne dă un pătrat (romb) cu vârfurile $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ (în cele patru cadrane I, II, III, IV avem respectiv $x + y = 1$, $-x + y = 1$, $-x - y = 1$, $x - y = 1$) iar $x^2 + y^2 = (\sqrt{\alpha})^2$ este un cerc cu centrul în $(0,0)$ de rază $\sqrt{\alpha}$. Patru soluţii avem când cercul este înscris sau circumscris pătratului, $\alpha = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

1.113B Soluţiile sistemului $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6 \end{cases}$: $y = 6 - x$, $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_2 = 4$; altfel, $x + y = 6$, $xy = 8$.

1.114B Ordonaţi crescător numerele $x = 2 - \sqrt{3}$, $y = \sqrt{2} - 1$, $z = \sqrt{5} - 2$, $2 - \sqrt{3} < \sqrt{2} - 1$, $3 < \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $9 < 5 + 2\sqrt{6}$, $2 < \sqrt{6}$ deci $x < y$; $\sqrt{5} - 2 < \sqrt{2} - 1$, $\sqrt{5} - \sqrt{2} < 1$, $5 + 2 - 2\sqrt{10} < 1$, $3 < \sqrt{10}$ deci $z < y$; $\sqrt{5} - 2 < 2 - \sqrt{3}$, $\sqrt{5} + \sqrt{3} < 4$, $8 + 2\sqrt{15} < 16$, $\sqrt{15} < 4$ deci $z < x$ ordinea este $z < x < y$.

1.115B Numărul $P = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ este impar: $\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 \ldots (2n-1)(2n)}{2^n n!} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \ldots (2n-1)\cdot[2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 \ldots -(2n)]}{2^n n!} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \ldots (2n-1)\cdot 2^n\cdot n!}{2^n n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1) = (2n-1)!!$ deci P este impar.

1.116B Funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ este inversabilă: este continuă pe $(-\infty, 1)$ şi pe $(1, \infty)$ $x = 1$ este asimptotă verticală, $y = 2$ asimptotă orizontală $\mathrm{Im}f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ deci este surjectivă, $f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} > 0$ este strict crescătoare pe $(-\infty, 1)$ şi pe $(1, \infty)$ deci este injectivă (altfel $f(x_1) = \frac{2x_1-3}{x_1-1} = \frac{2x_2-3}{x_2-1} = f(x_2) \Rightarrow 2(x_2 - x_1) = 3(x_2 - x_1) \Rightarrow x_1 = x_2$). Faptul că este inversabilă se verifică şi direct, calculând inversa: $y = \frac{2x-3}{x-1} \Rightarrow yx - y = 2x - 3$, $x = \frac{y-3}{y-2}$, $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{x-2}$.

1.117B Valoarea lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care ecuaţia $m^2x - m = mx - 1$ are o singură soluţie număr întreg este $m = -1 : x(m-1)m = m - 1 \Rightarrow m = 1$ identitate, $m \neq 1$ şi $m \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{m}$, deci $m = -1$.

1.118B Pentru ecuaţia $x^2 - (m+2)x + m = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2 şi $m \in \mathbf{R}$, valorile lui m astfel ca $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = -4$ sunt $m = -1 : \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1x_2} = \frac{(x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2)}{x_1x_2} = \frac{(m+2)^3 - 3m(m+2)}{m} = -4 \Rightarrow m^3 + 3m^2 + 10m + 8 = 0$ deci $m = -1$ iar $m^2 + 2m + 8 = 0$ are rădăcini complexe.

1.119B Valorile lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care soluţiile ecuaţiei $2mx^2 + 4(m+1)x + 4m + 1 = 0$ sunt reale şi strict pozitive: $m \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) : \Delta > 0$, $\Delta = -4m^2 + 6m + 4 > 0 \Rightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, $S > 0$, $S = -\frac{2(m+1)}{m} > 0 \Rightarrow m \in (-1, 0)$ şi $P > 0$, $P = \frac{4m+1}{m} > 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup (0, \infty)$ deci $m \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

1.120B $m \in \mathbf{R}$ pentru care $x^2 + y^2 - 2x - y - m \geq 0$ $(\forall)x, y \in \mathbf{R}$: $x^2 + y^2 - 2x - y - m = (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{4} + m\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{5}{4} + m \leq 0$ deci $m \leq -\frac{5}{4}$. Altfel: trinomul în x, $x^2 - 2x + (y^2 - y - m) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ dacă $\Delta y = 1 - (y^2 - y - m) \leq 0$ deci $y^2 - y - (m+1) \geq 0$ $\forall y \in \mathbf{R} \Rightarrow \Delta m = 4m + 5 \leq 0$.

1.121B Pentru sistemul $\begin{cases} x^2 - y^2 + xy = 2 \\ x^2 - 2xy = 2 \end{cases}$ cu soluţiile $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$
$\ldots (x_n, y_n)$ şi $A = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $B = \sum_{k=1}^{n} y_k$ avem $A = B = 0 : (x^2 - y^2 + xy) -$
$(x^2 - 2xy) = 0$, $-y^2 + 3xy = 0$ de unde $y = 0$ şi $x = \pm\sqrt{2}$ sau $y = 3x$,
$x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, $y = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}i$. Dacă luăm numai soluţiile reale, $A = B = 0$ iar dacă
luăm toate soluţiile avem tot $A = B = 0$.

1.122B Soluţiile sistemului $\begin{cases} x + y = a + b \\ (ax + by)(bx + ay) = ab(a + b)^2 \end{cases}$ pentru $a \neq$
b, $a, b \in \mathbf{R}$ sunt $\{(0, a+b), (a+b, 0)\}$: $(a^2+b^2)xy + (x^2+y^2)ab = ab(a+b)^2 \Rightarrow$
$(a^2 + b^2)xy + [(a + b)^2 - 2xy]ab = ab(a + b)^2 \Rightarrow (a - b)^2 xy = 0$ deci $x = 0$,
$y = a + b$ sau $y = 0$, $x = a + b$.

1.123B Funcţia $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ ax^2 + bx, & x \geq 0 \end{cases}$ este bijectivă dacă: $a > 0$,
$b \geq 0$ sau $a = 0$, $b > 0$: graficul este o semidreaptă pentru $x < 0$ urmat
de o porţiune de parabolă pentru $x \geq 0$. f este crescătoare dacă $a > 0$ şi
$b \geq 0$ (sau dacă $a = 0$, $b > 0$) deoarece $x_V = -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow$ pe $(0, \infty)$ f este
crescătoare. Evident este surjectivă.

1.124B Soluţia inecuaţiei $|||x| + 1| - 1| \leq 1$ este $x \in [-1, 1]$. $|x| + 1 > 0 \Rightarrow$
$||x| + 1| = |x| + 1$, deci $||x| + 1 - 1| = ||x|| = |x| \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$.

1.125B Expresia $E = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_1 x_2}$ unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 -$
$mx + m + 3 = 0$ este egală cu $\frac{m^2-m-3}{m^2+6m+9}$: $E = \frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2} + \frac{1}{x_1x_2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - x_1x_2}{(x_1x_2)^2} =$
$\frac{m^2-m-3}{(m+3)^2}$.

1.126B Valorile lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care ecuaţia $(m-2)x^2 - 2x + (m-2) = 0$
admite rădăcini reale distincte: $m \in (1, 3) \setminus \{2\}$. $\Delta = 1 - (m - 2)^2 =$
$-m^2 + 4m - 3 > 0$, $m^2 - 4m + 3 < 0$, $m \in (1, 3)$; dar $m = +2$ nu convine
deoarece avem o singură rădăcină $x = 0$.

1.127B Coordonatele (x, y) ale vârfurilor parabolelor $\Gamma_m : y = mx^2 + 2(m-$
$1)x + m + 1$, $m \neq 0$ verifică relaţia $y = 2 - x$, $x \neq -1$. $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2(m-1)}{2m} =$
$-1 + \frac{1}{m}$, $y_V = f(x_V) = m\left(\frac{m-1}{m}\right)^2 - 2\frac{(m-1)^2}{m} + m + 1 = -\frac{(m-1)^2}{m} + m + 1 =$
$3 - \frac{1}{m}$, deci $x_V + y_V = 2$ sau $x + y = 2$. $x = -1$, $y = 1$ nu este vârful nici
unei parabole.

1.128B Soluţiile sistemului $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x^2 + y^2 - 5y = 0 \end{cases}$ sunt $(0,0)$ şi $(-2, 4)$: $y =$
$-2x$, $x^2 + 4x^2 + 10x = 0$, $x = 0, x = -2$ respectiv $y = 0$, $y = 4$.

1.129B Dacă $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x$, $g(x) = -x^2$ şi $a = (f \circ g)(1)$ atunci
$a = f(g(x))|_{x=1} = 3g(x)|_{x=1} = 3(-x^2)|_{x=1} = -3$, $(g \circ f) = -(f(x))^2 =$
$-9x^2$.

1.130B Numărul n de soluţii reale ale ecuaţiei $|x| - \frac{1}{2}x = 3$ este $n = 2 : x >$
$0 \Rightarrow x - \frac{x}{2} = 3$, $x = 6$ iar $x < 0 \Rightarrow -x - \frac{x}{2} = 3$, $x = -2$ deci $n = 2$.

1.131B Suma pătratelor soluţiilor ecuaţiei $x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$,
$S = x_1^2 + x_2^2$ verifică condiţia $S = 25$ dacă $m \in \{5, -3\}$: $S = (x_1 + x_2)^2 -$
$2x_1x_2 = (m - 2)^2 + 2(m + 3) = m^2 - 2m + 10 = 25$, $m \in \{5, -3\}$.

1.132B Mulţimea $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + |x| - 2 \leq 0\}$ este $A = [-1, 1]$: dacă $x \geq 0$,
$x^2 + x - 2 \leq 0$, $x_{1,2} = 1, -2$ deci $x \in [-2, 1]$, $x \geq 0$ rezultă $x \in [0, 1]$; pentru
$x \leq 0$, $x^2 - x - 2 \leq 0$, $x_{1,2} = -1, 2$, $x \in [-1, 2]$ şi $x \leq 0$ deci $x \in [-1, 0]$,
rezultă $A = [-1, 1]$.

1.133B Numărul de soluţii ale sistemului $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 70 \\ 6x^2 + xy - y^2 = 50 \end{cases}$. Avem
$-5(2x^2 + 3xy + y^2) + 7(6x^2 + xy - y^2) = 0$, $32x^2 - 8xy - 12y^2 = 0$, $8x^2 - 2xy -$
$3y^2 = 0$, $8 - 2\frac{y}{x} - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} = -2$, $\frac{y}{x} = \frac{4}{3}$; înlocuim în una din ecuaţii
succesiv $y = -2x$ sau $y = \frac{4}{3}x$ şi obţinem două soluţii (3,4) şi $(-3, -4)$.

1.134B Trinomul $x^2 - 2(4m + 3)x + 6m + 7$ este pătratul unui binom deci
un pătrat perfect dacă $\Delta = (4m + 3)^2 - (6m + 7) = 2(8m^2 + 9m + 1) = 0$
deci $m = -1$ sau $m = -\frac{1}{8}$.

1.135B Valorile parametrului real m pentru care rădăcinile ecuaţiei
$(m^2+1)x^2 - (2m+1)x + 1 = 0$ sunt mai mici sau egale cu 1; $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$
verifică inegalitatea $m \geq \frac{3}{4}$. Facem schimbarea $x = y + 1$, $x_1 = y_1 + 1 \leq 1$,
$x_2 = y_2 + 1 \leq 1$ şi rezultă $y_1 \leq 0$, $y_2 \leq 0$ deci $\Delta \geq 0$, $S = y_1 + y_2 \leq 0$, $P =$
$y_1y_2 \geq 0$ pentru ecuaţia în $y : (m^2+1)y^2 + y(2m^2 - 2m + 1) + m^2 - 2m + 1 = 0$.
Δ poate fi calculat de la ecuaţia în x, $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2+1) = 4m - 3 \geq 0$
deci $m \geq \frac{3}{4}$. $S = y_1 + y_2 = -(2m^2 - 2m + 1) = -[(m - 1)^2 + m^2] < 0$,
$P = (m - 1)^2 \geq 0$ deci rămâne condiţia $m \geq \frac{3}{4}$.

1.136B Dacă $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \leq 0 \\ 7x, & x > 0 \end{cases}$ şi $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq -2 \\ 2x - 1, & x > -2 \end{cases}$
atunci $h = g \circ f$ este dată de $h(x) = \begin{cases} (2x - 3)^2, & x \leq 0 \\ 14x - 1, & x > 0 \end{cases}$. $(g \circ f)(x) =$
$g(f(x)) = \begin{cases} (f(x))^2, f(x) \leq -2 \\ 2f(x) - 1, f(x) > -2 \end{cases}$ dar $f(x) = 2x - 3 < -2$ pentru $x < 0$
şi $f(x) = 7x > -2$ pentru $x > 0$ deci $h(x) = \begin{cases} (2x - 3)^2, & x \leq 0 \\ 14x - 1, & x > 0 \end{cases}$

$1 - x = |x+1|$ este $x = 0$. Avem pentru $x < -1$,
1.137B Soluţia ecuaţiei $1 - x = -x - 1$ imposibil şi pentru $x \geq -1$, $1 - x = x + 1 \Rightarrow x = 0$.
pentru care rădăcinile x_1, x_2 ale
1.138B Mulţimea A a valorilor lui m sunt în intervalul (1,4) este $A = \left(4, \frac{25}{4}\right)$. Vezi
ecuaţiei $x^2 - 5x + m = 0$ se face schimbarea $y = \frac{x-1}{x-4}$ şi pentru ecuaţia în y obţinută
problema 1.107B: se pun condiţiile $\Delta \geq 0$, $S = y_1 + y_2 < 0$, $P = y_1 y_2 > 0$.
1.139B Inecuaţia $(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) < 4$ are soluţia $\emptyset$ (nu
are soluţii): $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} < 2$, deci $t + \frac{1}{t} < 2$ cu $t > 0$. $t^2 - 2t + 1 < 0$,
$(t-1)^2 < 0$ fals.
1.140B Funcţiile $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4$ şi $g(x) = x^3 + x + 2$ sunt prima
neinjectivă a doua injectivă deoarece spre exemplu $f(0) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 4$.
$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 + x_1 - x_2 = 0$, $(x_1 - x_2)\left[\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + 1\right] =$
$0 \Rightarrow x_1 = x_2$.
1.141B Inecuaţia $|x-3| > x - 1$ este verificată pentru $x \in (-\infty, 2)$: $x > 3$
$\Rightarrow x - 3 > x - 1$ fals, $x < 3 \Rightarrow -x + 3 > x - 1$, $2x < 4$, $x < 2$.
1.142B Valoarea parametrului $m \in \mathbf{R}$ astfel încât ecuaţiile $x^2 + mx + 1 = 0$,
$x^2 + x + m = 0$ să aibă exact o soluţie reală comună este $m = -2$: notăm x_0
rădăcina comună, $(x_0^2 + mx_0 + 1) - (x_0^2 + x_0 + m) = 0 \Rightarrow x_0(m-1) - (m-1) = 0$,
$(m-1)(x_0 - 1) = 0$. Dacă $m = 1$ avem două rădăcini comune, dacă $m \neq$
$1 \Rightarrow x_0 = 1$, $m = -2$.
1.143B Aflaţi funcţia $f(x) = ax^2 + bx + c$ care verifică condiţiile $f(-1) = 13$,
$f(2) = 10$ şi are un minim egal cu 9: $x_V = -\frac{b}{2a}$, $f(x_V) = 9$, $a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 -$
$\frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 9$, $b^2 - 4ac = -36a$, $a - b + c = 13$, $4a + 2b + c = 10$,
$a + b = -1 \Rightarrow b^2 - 4a(13 - a + b) = -36a$, $(-1-a)^2 - 4a(13 - 2a - 1) = -36a$,
$9a^2 - 10a + 1 = 0$, $a_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-9}}{9} = \frac{5 \pm 4}{9}$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{9}$, $b_1 = -2$,
$b_2 = -\frac{10}{9}$, $c_1 = 10$, $c_2 = \frac{106}{9}$ deci polinoamele sunt $f(x) = x^2 - 2x + 10$ sau
$f(x) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{106}{9}$.
1.144B Soluţiile sistemului $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{16}$ sunt (4,16), (16,4).
Se observă că $x, y > 0$; notăm $\sqrt{\frac{y}{x}} = t$, $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$, $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $\frac{y}{x} = 4$,
$\frac{y}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{4x} = \frac{5}{16}$, $x = 4$, $y = 16$, $\frac{1}{x} + \frac{4}{x} = \frac{5}{16}$, $x = 16$, $y = 4$.
1.145C Valorile $n \in \mathbf{N}$ pentru care expresia $E = \sqrt[n+1]{\sqrt[4-n]{n^2 + n + 1}}$ are
sens sunt 1 şi 2. Condiţiile sunt $n + 1 \geq 2$, $4 - n \geq 2$ unde $n + 1$ şi $4 - n$
trebuie să fie numere naturale ≥ 2 deci $1 \leq n \leq 2$, adică $n = 1$ sau $n = 2$.
1.146C Pentru funcţiile $f, g, h : \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$,
$h(x) = -\frac{1}{x}$ una din următoarele relaţii este adevărată: a) $f \circ f = g$; b)

$f \circ f = h$; c) $g \circ g = f$; d) $g \circ g = h$; e) $h \circ h = f$; f) $h \circ h = g$. Verificând
grila observăm că se verifică d) $g \circ g = h$; $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{1+x}{1-x}\right) =$
$\frac{1 + \frac{1+x}{1-x}}{1 - \frac{1+x}{1-x}} = \frac{1 - x + 1 + x}{1 - x - 1 - x} = \frac{2}{-2x} = -\frac{1}{x} = h(x)$.

1.147C Pentru ca funcţia $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & x \leq 1 \\ x + 2a & x > 1 \end{cases}$ să fie injectivă, parame-
trul a trebuie să verifice condiţia $1 \leq a$. Dacă $a < 0$, $y = ax + 2$, $x \leq 1$ este
descrescătoare iar $y = x + 2a$, $x > 1$ este crescătoare, deci f nu este injectivă,
deci $a > 0$. Mai trebuie verificată şi condiţia evidentă între ordonatele din
stânga şi dreapta $a + 2 \leq 1 + 2a$, deci $1 \leq a$.
1.148C Să se rezolve ecuaţia $f(f(x)) = 1$ dacă $f(x) = \frac{m+nx}{n+mx}$, $n \neq m$.
$f(f(x)) = \frac{m + n\frac{m+nx}{n+mx}}{n + m\frac{m+nx}{n+mx}} = \frac{2mn + (m^2+n^2)x}{n^2 + m^2 + 2mnx} = 1 \Rightarrow (m-n)^2(x-1) = 0$, $x = 1$.
1.149C Fie funcţiile $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ şi $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
$g(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11, & x \geq 3 \\ x - 1, & x < 3 \end{cases}$. Atunci $g^{-1}(3) = 4$ deci f). Verificând
grila se observă că $g(4) = 16 - 24 + 11 = 3$, deci $g^{-1}(3) = 4$.
1.150C Să se rezolve ecuaţia $f(x)f^{-1}(x) = 1$ unde $f(x) = 3x + 2$. Din
$y = 3x + 2$ rezultă $x = \frac{1}{3}(y - 2)$, deci $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x - 2)$ de unde $f(x) \cdot f^{-1}(x) =$
$(3x + 2) \cdot \frac{1}{3}(x - 2) = x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} = 1 \Rightarrow x = -1$, $x = \frac{7}{3}$.
1.151C Dacă Δ, P şi S sunt discriminantul, produsul şi suma soluţiilor
ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ şi a, Δ, P, S sunt în această ordine numere
întregi consecutive atunci produsul abc are valoare 2: numerele sunt a, $\Delta =$
$b^2 - 4ac$, $P = \frac{c}{a}$, $S = -\frac{b}{a}$ deci a, $b^2 - 4ac = a + 1$, $\frac{c}{a} = a + 2$, $-\frac{b}{a} = a + 3 \Rightarrow c =$
$a^2 + 2a$, $b = -a^2 - 3a$, $(a^2 + 3a)^2 - 4a(a^2 + 2a) = a + 1 \Rightarrow a^4 + 2a^3 + a^2 - a - 1 = 0$
deci $a = -1$, $b = 2$, $c = -1$ iar produsul $abc = 2$.
1.152C Condiţia $f(x) \leq g(x)$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$, unde $f(x) = mx + 2$, $g(x) = 3x + m$
este verificată pentru $m = 3$: $mx + 2 \leq 3x + m \Rightarrow x(m - 3) \leq m - 2$; dacă
$m \neq 3$ avem $x \leq \frac{m-2}{m-3}$ sau $x \geq \frac{m-2}{m-3}$ după cum $m > 3$ sau $m < 3$ deci condiţia
nu este verificată pentru orice x; dacă $m = 3$, avem $0 < 1$ deci se verifică.
1.153C Soluţia ecuaţiei $\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x} = 1$ este $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $x + 1 + 1 -$
$x - 2\sqrt{1 - x^2} = 1$, $1 = 2\sqrt{1 - x^2}$, $4x^2 = 3$, $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ dar $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
nu verifică ecuaţia, $\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} < 0$ nu poate fi 1 dar $\frac{\sqrt{3}}{2}$ verifică
ecuaţia, $\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{2}$ evident.
1.154C Dacă $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $\beta^2 + \alpha < 0$ atunci ecuaţia $ax^2 + bx +$
$\alpha a + \beta b = 0$ are soluţii reale distincte: $\Delta = b^2 - 4(a\beta)b - 4\alpha a^2 > 0$ $(\forall)b \in \mathbf{R}$

dacă $\Delta_1 = \Delta_2 = (2a\beta)^2 + 4a\alpha^2 = 4a^2(\beta^2 + \alpha) < 0$ deoarece $\beta^2 + \alpha < 0$, $a \neq 0$ deci $\Delta > 0$ şi ecuaţia are două rădăcini reale şi distincte.

1.155C Valoarea lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + z^2 - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ admite soluţie reală unică este $m = -1$: $y = m - x$, $x^2 + z^2 - 2(m-x) + 2z = 0$, $x^2 + z^2 + 2x + 2z = 2m$, $(x+1)^2 + (z+1)^2 = (\sqrt{2(m+1)})^2$, $m \geq -1$. Soluţia este unică pentru $m = -1 \Rightarrow x = -1$, $z = -1$, $y = 0$.

1.156C Pentru funcţia $f(x) = \frac{x^2 - x + a}{x^2 + x + 1}$ avem $\mathrm{Im} f = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$ dacă $a = 1$. Condiţia $\frac{1}{3} \leq \frac{x^2 - x + a}{x^2 + x + 1} \leq 3$ echivalentă cu inegalităţile $2x^2 + 4x + 3 - a \geq 0$, $2x^2 - 4x + 3a - 1 \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ deci $\Delta_1 = 2a - 2 \leq 0$ respectiv $\Delta_2 = 6 - 6a \leq 0$ ne dau $a \leq 1$ respectiv $1 \leq a$, deci $a = 1$.

1.157C Relaţia care există între $a, b, c \in \mathbf{R}$ pentru ca funcţia $f(x) = ax|x| + bx + c$ să fie bijectivă este $a \cdot b \geq 0$: graficul lui

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \geq 0, p_1 \\ -ax^2 + bx + c, & x < 0, p_2 \end{cases}$$

este dat de două porţiuni de parabolă p_1 şi p_2 racordate în $x = 0$, $y = c$ şi trebuie să fie monotonă (strict crescătoare pentru $a > 0$, respectiv strict descrescătoare pentru $a < 0$) pentru aceasta este necesar ca abscisa vârfurilor corespunzătoare lui p_1 respectiv p_2, $x_V = -\frac{b}{2a}$ respectiv $x_V = \frac{b}{2a}$ să fie $x_V \leq 0$ respectiv $x_V \geq 0$ (pentru $a > 0$) şi invers pentru $a < 0$ deci $a \cdot b \geq 0$.

1.158C Condiţia ca $\mathrm{Im} f \subset [-3, 2]$ pentru $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 - x + 1}$ este $a \in A = [-4, 0]$. Procedăm ca în 1.156C, $-3 \leq \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 - x + 1} \leq 2$ obţinem inegalităţile $0 \leq 4x^2 + x(a-3) + 4$ cu $\Delta_1 = (a-3)^2 - 64 = a^2 - 6a - 55 \leq 0$ deci $a \in [-5, 11]$ şi $x^2 - x(a+2) - 1 \geq 0$ cu $\Delta_2 = a^2 + 4a \leq 0$ deci $a \in [-4, 0]$. Intersecţia celor două intervale este $[-4, 0]$.

1.159C Soluţiile raţionale ale sistemului $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$: $x = 2$, $y = -1$; $y = 3 - 2x$, $x^3 + (3-2x)^3 = 7$, $-7x^3 + 36x^2 - 54x + 20 = 0$, $-7x^3 + 14x^2 + 22x^2 - 44x - 10x + 20 = 0$, $-7x^2(x-2) + 22x(x-2) - 10(x-2) = 0$, $(x-2)(-7x^2 + 22x - 10) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$, $x_{2,3} = \frac{11 \pm \sqrt{51}}{7}$ deci $x = 2$, $y = -1$.

1.160C Fie $f, g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(n) = 2n - 1$, $g(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ impar} \\ n, & n \text{ par} \end{cases}$. Atunci $g \circ f = 1_{\mathbf{N}}$. $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = \begin{cases} \frac{f(n)+1}{2}, & f(n) \text{ impar} \\ f(n), & f(n) \text{ par} \end{cases} = \frac{f(n)+1}{2}$

deoarece $f(n) = 2n - 1$ este impar deci $(g \circ f)(n) = \frac{2n-1+1}{2} = n = 1_{\mathbf{N}}(n)$, adică $g \circ f = 1_{\mathbf{N}}$.

1.161C Funcţia $f(x) = \begin{cases} ax - 2, & x \leq 1 \\ x - 2a, & x > 1 \end{cases}$ este injectivă dacă $a \in (0, 1]$. Analog cu 1.147C utilizând graficul găsim condiţiile $a > 0$ şi $a - 2 \leq 1 - 2a$, $a \leq 1$ deci $a \in (0, 1]$.

1.162C Fie ecuaţia $(m+1)x^2 - (2m+1)x + m - 1 = 0$ şi mulţimile $A = \{m \in \mathbf{R}|$ ecuaţia are două soluţii strict pozitive $\}$, $B = \{m \in \mathbf{R}|$ ecuaţia are soluţii de acelaşi semn $\}$. Atunci $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 - 1) = 4m + 5 \geq 0$ deci $m \geq -\frac{5}{4}$, $S = \frac{2m+1}{m+1} > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ şi $P = \frac{m-1}{m+1} > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; rezultă $A \cap B = \left[-\frac{5}{4}, -1\right) \cup (1, \infty)$.

1.163C Dacă $f(x) = \frac{mx^2 + x + m}{x^2 + 1}$ şi $A = \{m \in \mathbf{R}, \mathrm{Im} f = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\}$, atunci $A = \{+1\}$. Se procedează ca în 1.156C, 1.158C scriind $\frac{1}{2} \leq \frac{mx^2 + x + m}{x^2 + 1} \leq \frac{3}{2}$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Altfel, se ştie că $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ (se verifică uşor) deci $\frac{1}{2} \leq m - \frac{1}{2} \leq m + \frac{x}{x^2+1} \leq m + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 1 \leq m \leq 1$ deci $m = 1$, $A = \{+1\}$.

1.164C În sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ |x - y| = 1 \end{cases}$ cu soluţiile $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ şi $A = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $B = \sum_{k=1}^{n} y_k$, avem $A = B = 0$. $|x - y| = 1 \Rightarrow x - y = \pm 1$.

1) $y = x - 1$, $2x^2 - 2x - 1 = 0$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$, $y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$;

2) $y = x + 1$, $2x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$, $y_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$, deci $A = B = 0$. Toate cele patru soluţii verifică sistemul. Altfel, $|x - y| = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{(x+y)^2 - 4xy} = 1$, $(x+y)^2 - 2xy = 2$ etc.

1.165C Soluţia ecuaţiei $\sqrt[3]{1331_{(x)}} + \sqrt{121_{(y)}} = 9$, unde indicele inferior reprezintă baza de numeraţie în care este exprimat numărul indexat este $x = 4$, $y = 3$. Avem $x, y \in \mathbf{N}$, $x \geq 4$, $y \geq 3$ şi ecuaţia se scrie $(x+1) + (y+1) = 9$ cu singura soluţie $x = 4$, $y = 3$.

1.166C Soluţiile inecuaţiei $\left(a\frac{x}{y} + b\right)^2 + \left(a\frac{y}{x} + b\right)^2 \geq 2(a+b)^2$, $x, y > 0$, $a, b > 0$ sunt: $(x, y) \in (R_+^*)^2$. Inecuaţia se scrie $a^2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] + 2ab\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 2a^2 + 4ab$. Dar $t + \frac{1}{t} \geq 2$ pentru $\forall t > 0$, deci $a^2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] \geq 2a^2$, $2ab\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 2(2ab)$ şi prin adunare obţinem inegalitatea dată, verificată pentru $\forall x, y \in R_+^*$.

1.167C Soluţia ecuaţiei $x^2 + y^2 - 2[a(x+y) + b(x-y) - (c^2 + d^2)] = 0$,

$a, b, c, d \in \mathbf{R}$ în condiţiile $ab = cd$, $a + c = b + d$ este $x = a + b$, $y = a - b$.
Din $ab = cd$ şi $a - b = d - c \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab = d^2 + c^2 - 2dc$ deci $a^2 + b^2 =$ $c^2 + d^2$. Ecuaţia devine $x^2 - 2(a+b)x + y^2 - 2(a-b)y + 2(c^2 + d^2) = 0$ de unde $[x - (a+b)]^2 + [y - (a-b)]^2 - [(a+b)^2 + (a-b)^2] + 2(c^2 + d^2) = 0$ $\Rightarrow [x - (a+b)]^2 + [y - (a-b)]^2 = 0 \Rightarrow x = a + b$, $y = a - b$.

1.168C Minimul expresiei $E(x, y) = 4x^2 + 12xy + 10y^2 - 20x - 32y + 33$, $x, y \in \mathbf{R}$ este $E = 7$. Observăm că $E(x, y) = (2x + 3y - 5)^2 + y^2 - 2y + 8 =$ $(2x+3y-5)^2 + (y-1)^2 - 7$ deci minimul este 7 obţinut pentru $y = 1$, $x = 1$. Altfel: $4\left(x^2 + 3xy + \frac{9}{4}y^2\right) + y^2 - 20x - 32y + 8 = 4\left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 + \ldots$ şi notăm $X = x + \frac{3}{2}y$, $Y = y$, restrângând apoi pătratele în X, Y. Mai putem considera trinomul în x cu coeficienţi în y (y parametru) $4x^2 + 2x(6y - 10) + 10y^2 -$ $32y + 33$ şi calculând ordonata vârfului $u_V = f(x_V)$ (în variabilele (x, u)), $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2(6y-10)}{2 \cdot 4} = -\frac{3y-5}{2}$, $u_V = 4\left(\frac{3y-5}{2}\right)^2 - \frac{4(3y-5)^2}{2} + 10y^2 - 3y + 33 =$ $-(3y-5)^2 + 10y^2 - 32y + 33 = y^2 - 2y + 8 = (y-1)^2 + 7 \geq 7$.

1.169C Se cere valoarea parametrului $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $\frac{xy}{x+y} < 0$ unde (x, y) este o soluţie oarecare a sistemului $x^3 + y^3 - 2(x + y) = 25a$, $x^2 - xy + y^2 = 7$. Notăm $x + y = s$, $xy = p$ şi obţinem $(x+y)^3 - 3xy(x+y) - 2(x+y) = 25a$, $(x+y)^2 - 3xy = 7$, $s^3 - 3ps - 2s = 25a$, $s^2 - 3p = 7$. Se obţine $s = 5a$, $p = \frac{25a^2-7}{3}$, $\frac{p}{s} = \frac{25a^2-7}{15a} < 0$, $a \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{5}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{7}}{5}\right)$.

1.170C Fie $A = \{x + y\sqrt{2} | x, y \in Q\}$ şi $\alpha = \sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}}$. Atunci $\alpha \in A$. Observăm că $99 - 70\sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{2})^3$ deci $\alpha = 3 - 2\sqrt{2} \in A$.

1.171C Dacă $A = \operatorname{Im} f$ şi $I = \mathbf{R} \setminus Q$ unde $f : \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $a, b, c, d \in Q$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$, atunci $A \cap I = I$. Fie $y \in \mathbf{R}$, $y \neq \frac{a}{c}$ astfel ca $\frac{ax+b}{cx+d} = y$ de unde $x = \frac{dy-b}{a-cy}$. Deoarece $\frac{a}{c} \in Q$, $\frac{a}{c} \notin I$, deci $A \cap I = I$.

1.172C Maximul sumei $x_0 + y_0 + z_0 = s_0$ unde (x_0, y_0, z_0) este soluţie reală a sistemului $2x = y + \frac{2}{y}$, $2y = z + \frac{2}{z}$, $2z = x + \frac{2}{x}$, este $3\sqrt{2}$. Sistemul se scrie $y^2 - 2xy + 2 = 0$, $z^2 - 2yz + 2 = 0$, $x^2 - 2zx + 2 = 0$ şi deoarece $x, y, z \in \mathbf{R}$ rezultă $x^2 - 2 \geq 0$, $y^2 - 2 \geq 0$, $z^2 - 2 \geq 0$ (spre exemplu pentru ecuaţia $y^2 - 2xy + 2 = 0$ discriminantul $\Delta = x^2 - 2 \geq 0$). Observăm că x, y, z ori sunt toate pozitive ori toate negative. Presupunem toate pozitive, deci $x \geq \sqrt{2}$, $y \geq \sqrt{2}$, $z \geq \sqrt{2}$ şi toate distincte; alegem $x < y < z$. $2(x - z) = y - x + 2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$, $2(x - z) = (y - x)\left[1 - \frac{2}{xy}\right]$. Dar $x - z < 0$, $y - x > 0$ deci $1 - \frac{2}{xy} < 0$, $xy < 2$ în contradicţie cu $x \geq \sqrt{2}$, $y \geq \sqrt{2}$ ($xy > 2$). Deci x, y, z nu pot fi toate distincte; fie $x = y$ din ultima relaţie rezultă $x = z$ deci $x = y = z$ de unde $x = y = z = \sqrt{2}$. Similar în cazul $x, y, z < 0$ şi rezultă $x = y = z = -\sqrt{2}$. Soluţiile sunt $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ şi $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ şi maximul lui s_0 este $3\sqrt{2}$.

1.173C Dacă ecuaţia $x^2 - |x| + m = 0$, $m \in \mathbf{R}$, are trei soluţii reale distincte, atunci $m = 0$. În ambele cazuri şi $x < 0$ şi $x > 0$, $\Delta = 1 - 4m > 0$, $m < \frac{1}{4}$ dar pentru anumite valori ale lui m putem avea 4 rădăcini. Trei rădăcini rămân pentru $m = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

1.174C Numerele $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ au proprietatea că există $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ astfel încât $x_1 x_2 = \alpha$ şi $|x_1 - x_2| = \beta$. Atunci $\beta^2 + 4\alpha \geq 0$. R. $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} =$ $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \beta$, $(x_1 + x_2)^2 = \beta^2 + 4\alpha \geq 0$.

1.175C Perechile de numere raţionale (x, y) care satisfac egalităţile $xy =$ $x + y = x^2 - y^2$ sunt în număr de una. $x + y = (x+y)(x-y) \Rightarrow (x+y)[(x-y) - 1] = 0$ deci $x + y = 0$ sau $x - y = 1$ de unde $x = y = 0$ sau $y = x - 1$, $x^2 - 3x + 1 = 0$, $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ care nu sunt raţionale, deci rămâne (0,0), una.

1.176C Câte soluţii distincte $(p, q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ are ecuaţia $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$. $\frac{1}{p} =$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{q} = \frac{q-2}{2q}$, $p = \frac{2q}{q-2} = 2 + \frac{4}{q-2} \Rightarrow q - 2 = \pm 1$, $q - 2 = \pm 2$, $q - 2 = \pm 4$ de unde rezultă $p = q = 4$, $p = 3$, $q = 6$, $p = 6$, $q = 3$ deci sunt trei soluţii.

1.177C Nici un număr de forma $111\ldots11$, $n \geq 2$ cifre nu este pătratul unui întreg: pătratul oricărui număr este de forma $4p$ sau $4p + 1$ dar $111\ldots11 =$ $111\ldots100 + 4 \cdot 2 + 3 = 4p + 3$.

1.178C Fie m şi n numere naturale. Împărţim $m^2 + n^2$ la $m + n$ şi obţinem câtul q şi restul r. Să se determine toate perechile (m, n) pentru care avem $q^2 + r = 17$, $q, r \in \mathbf{N}$. Evident avem perechile $r = 1$, $q = 4$; $r = 8$, $q = 3$; $r = 13$, $q = 2$; $r = 16$, $q = 1$. Luând pe rând toate cazurile obţinem perechile (2,5) şi (5,2), spre exemplu $r = 1$, $q = 4 \Rightarrow m^2 + n^2 = (m + n)4 + 1$, $(m - 2)^2 + (n - 2)^2 = 3^2$ deci $m = 2$, $n = 5$ sau $m = 5$, $n = 2$ iar $r = 13$, $q = 2 \Rightarrow m^2 + n^2 = (m + n)2 + 13$, $(m - 1)^2 + (n - 1)^2 = 11$, nu există $m, n \in \mathbf{N}$ etc.

1.179C Soluţia inecuaţiei $||x + 1| - 1| \leq 3$ este $[-5, 3]$: $-3 \leq |x + 1| - 1 \leq$ $3 \Rightarrow -2 \leq |x + 1| \leq 4$ deci $|x + 1| \leq 4$, $-4 \leq x + 1 \leq 4$, $-5 \leq x \leq 3$.

1.180C $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & x\le -1\\ 2x+3, & x>-1\end{cases}$ are inversa $g(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x}, & x\le 0\\ \frac12(x-3), & x>1\end{cases}$

Din $y=-x^2+1$, $x\le -1$ rezultă $x=-\sqrt{1-y}$, $y\le 0$, iar pentru $x>-1$, $y=2x+3$, $y>1$, $x=\frac12(y-3)$, $y>1$ deci schimbând y cu x

$x=\begin{cases}-\sqrt{1-y}, & y\le 0\\ \frac12(y-3), & y>1\end{cases}$ şi $g(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x}, & x\le 0\\ \frac12(x-3), & x>1\end{cases}$.

1.181C Graficele funcţiilor $f_m(x)=mx^2+2(m+1)x+(m+2)$, $m\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ sunt tangente toate în $M_0(-1,0)$. Evident toate trec prin M_0, $0=m-2(m+1)+m+2$, $(\forall)m\in\mathbf{R}$. $f'_m(-1)=[2mx+2(m+1)]|_{x=-1}=2$ deci toate sunt tangente în M_0. Algebric, intersectăm două parabole oarecare $f_{m_1}(x)$, $f_{m_2}(x)$, $m_1\ne m_2$ şi rezultă că au un singur punct de intersecţie $(-1,0)$, deci sunt tangente în $(-1,0)$, $m_1x^2+2(m_1+1)x+m_1+2=m_2x^2+2(m_2+1)x+m_2+2\Rightarrow(m_1-m_2)[x^2+2x+1]=0$, $(m_1-m_2)(x+1)^2=0$, $m_1\ne m_2\Rightarrow x=-1$, $y=0$.

1.182C Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât

$$\{x\in\mathbf{R}|mx^2+(5m-3)x+13m+15=0\}\cap[-1,2]\ne\emptyset.$$

Se procedează ca în 1.138B, 1.107B, $x_1,x_2\in[-1,2]$ sau $x_1\in[-1,2]$, $x_2\notin[-1,2]$. Ultima condiţie se scrie: $\Delta>0$, $f(-1)f(2)<0$. $m\in\left[-2,-\frac13\right]$.

1.183C Dacă $f(x)=ax+b$ verifică condiţia $f\circ f=1_{\mathbf{R}}$ atunci $a=1$, $b=0$ au $a=-1$, $b\in\mathbf{R}$. Avem $f(f(x))=a^2x+ab+b=x$, $a^2=1$, $b(1+a)=0\Rightarrow a=\pm1$, $b=0$ sau $b\in\mathbf{R}$.

1.184C Să se rezolve ecuaţia $\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{x-1}{2}$ ($[a]$ = partea întreagă a lui a). Avem $[a]\le a<[a]+1$, deci $\frac{x-1}{2}\le\frac{x+1}{3}<\frac{x-1}{2}+1=\frac{x+1}{2}\Rightarrow 3x-3\le 2x+2$ deci $x\le 5$, $2x+2<3x+3$ deci $-1<x$ sau $-1<x\le 5$. Probăm care din valorile $\frac{x-1}{2}=0,1,2$, verifică: $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=5$.

1.185C Ecuaţia $x^2-2|x|=0$ are soluţiile $-2,0,2$ deci trei soluţii: $x\ge0\Rightarrow x^2-2x=0$, $x_1=0$, $x_2=2$; $x<0\Rightarrow x^2+2x=0$, $x=-2$.

1.186C Valorile parametrului $m\in\mathbf{R}$ pentru care sistemul $x^2+y^2=z$, $x+y+z=m$ are o soluţie reală unică: $x^2+y^2=m-x-y$, $\left(x+\frac12\right)^2+\left(y+\frac12\right)^2=\left(\sqrt{m+\frac12}\right)^2\Rightarrow m=-\frac12$, $x=y=-\frac12$, $z=\frac12$.

1.187C Valoarea sumei $S=x+y+u+v$ ştiind că x,y,u,v verifică sistemul $x+y=3$, $xu+yv=-1$, $xu^2+yv^2=3$, $xu^3+yv^3=-1$. Sistemul este asemănător cu 1.39A, x,y este schimbat în u,v şi invers iar termenii liberi sunt alţii; avem $S=3$.

1.2 Funcţia exponenţială şi logaritmică

1.188A Soluţiile ecuaţiei $\left(\sqrt{5+2\sqrt6}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt6}\right)^x=10$ sunt $x=\pm2$, $\{\pm2\}$: $5-2\sqrt6=\frac{1}{5+2\sqrt6}$. $\left(\sqrt{5+2\sqrt6}\right)^x=t$, $t+\frac1t=10$, $t^2-10t+1=0$, $t_{1,2}=5\pm\sqrt{24}=5\pm2\sqrt6$, $\left(\sqrt{5+2\sqrt6}\right)^x=5\pm2\sqrt6$, $x=\pm2$.

1.189A Numărul soluţiior ecuaţiei $3^{|x|}+4^{|x|}+5^{|x|}=12$ este doi. Funcţia $f(x)=3^x+4^x+5^x$, $x\ge0$ este crescătoare (sumă de funcţii crescătoare), $\mathrm{Im}f=[3,\infty)$, valoarea 12 ese luată într-un singur punct x_0, $f(x_0)=12$. Evident $f(-x_0)=12$, deci două soluţii.

1.190A Ecuaţia $3\lg^2x^2-\lg x-1=0$ are soluţiile $x_1=\sqrt[3]{10}$, $x_2=\sqrt[4]{10^{-1}}$: $12\lg^2x-\lg x-1=0$, $(\lg x)_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{24}=\frac{1\pm7}{24}\Rightarrow x_1=\sqrt[3]{10}$, $x_2=\sqrt[4]{10^{-1}}$.

1.191A Ecuaţia $\log_2x+\log_3x=1$ are soluţia $x=10^{\frac{\lg2\cdot\lg3}{\lg6}}$. Ecuaţia se scrie: $\frac{\lg x}{\lg2}+\frac{\lg x}{\lg3}=1\Rightarrow\lg x=\frac{\lg2\cdot\lg3}{\lg6}$, $x=10^{\frac{\lg2\cdot\lg3}{\lg6}}$.

1.192A Soluţia ecuaţiei $\log_{x+2}x+\log_x(x+2)=\frac52$ este $x=2$. Notăm $\log_{x+2}x=t$, $x>0$, $\log_x(x+2)=\frac{1}{\log_{x+2}x}=\frac1t$, $t+\frac1t=\frac52$, $t_1=2$, $t_2=\frac12$.

1.193A Ecuaţia $16^{|x|}-2\cdot4^{|x|}-8=0$ are soluţiile $x=\pm1$, $x\in\{1,-1\}$. $(4^{|x|})_{1,2}=1\pm\sqrt{1+8}=1\pm3\Rightarrow4^{|x|}=4$ deci $x=\pm1$.

1.194A Soluţiile inecuaţiei $9^x-5\cdot3^x+6<0$ sunt $x\in\left(\frac{\ln2}{\ln3},1\right)$. Rădăcinile ecuaţiei $(3^x)^2-5\cdot3^x+6=0$ sunt $3^x=2$, $3^x=3$ deci $2<3^x<3\Rightarrow\log_32<x<1$, $\frac{\ln2}{\ln3}<x<1$.

1.195A Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{4^x-2^{x+1}+1}=2^x-1$. Avem $\sqrt{(2^x-1)^2}=|2^x-1|$ deci $|2^x-1|=2^x-1$ pentru $x\ge0$ deci este o identitate pentru $x\ge0$.

1.196A Soluţia inecuaţiei $\frac{1}{2^x-1}>\frac{1}{1-2^{x-1}}$ este $A=\left(0,\log_2\frac34\right)\cup(1,\infty)$. Notăm $2^x=t>0$, $\frac{1}{t-1}>\frac{2}{2-t}\Rightarrow\frac{4-3t}{(t-1)(t-2)}<0$, $t>0$ deci $1<t<\frac43$ şi $2<t<\infty$ sau $1<2^x<\frac43$, $2<2^x<\infty\Rightarrow x\in\left(0,\log_2\frac34\right)\cup(1,\infty)$.

1.197A Inecuaţia $(2-\sqrt3)^x+(2+\sqrt3)^x\ge4$ are soluţia $|x|\ge1$. Notăm $(2+\sqrt3)^x=t$, $(2-\sqrt3)^x=\frac{1}{(2+\sqrt3)^x}=\frac1t$, $t>0$, $t+\frac1t\ge4$, $t<2-\sqrt3$ sau

$2+\sqrt{3}<t$, $(2+\sqrt{3})^x<2-\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^{-1}\Rightarrow x<-1$, $(2+\sqrt{3})^1<$
$(2+\sqrt{3})^x\Rightarrow 1\le x$ deci $|x|\ge 1$.
1.198A $(2x^2-x+1)^{x+1}>1$ are soluţia $(-1,0)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$: $2x^2-x+1>0$,
$(\forall)x\in\mathbf{R}$; dacă $2x^2-x+1>1\Rightarrow x+1>0$, $x>-1$, $x(2x-1)>0$,
$x\in(-\infty,0)\cup(\frac{1}{2},\infty)$ deci $x\in(-1,0)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$; dacă $2x^2-x+1<1\Rightarrow$
$x+1<0$, $x<-1$, $x(2x-1)<0$, $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cap(-\infty,-1)=\emptyset$. Prin urmare
$x\in(-1,0)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$.
1.199A Domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x)=\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)$ este dat
de $\frac{x+4}{x}>0\Rightarrow x\in(-\infty,-4)\cup(0,\infty)$.
1.200A Valoarea maximă a funcţiei $f(x)=(\log_3 x)^2+2(\log_3 x)\cdot(\log_3\frac{9}{x})$,
$x>0$ este 4. Notăm $\log_3 x=t\in(-\infty,\infty)$, $g(t)=t^2+2\cdot t(2-t)=$
$-t^2+4t=-[(t-2)^2-4]=4-(t-2)^2\le 4$.
1.201 Valorile lui $m\in\mathbf{R}$ astfel încât $\log_{\frac{m-1}{m+1}}(x^2+3)\ge 1$ $\forall x\in\mathbf{R}$ sunt
$m\in(-\infty,-2)$. Domeniul $m\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.
1°. $m>1\Rightarrow\frac{m-1}{m+1}<1\Rightarrow x^2+3\le\frac{m-1}{m+1}$, $(m+1)x^2+2m+4\le 0$, $m\in\emptyset$;
2°. $m<-1\Rightarrow\frac{m-1}{m+1}>1\Rightarrow x^2+3\ge\frac{m-1}{m+1}\Rightarrow(m+1)x^2+2m+4\le 0$,
$m<-2$.
1.202A Inecuaţia $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x^2+x}{x^2+2}<0$ are soluţia $(-\infty,-2)\cup(1,\infty)$. $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x^2+x}{x^2+2}<$
$0=\log_{\frac{1}{2}}1\Rightarrow\frac{2x^2+x}{x^2+2}>1$, $x^2+x-2>0\Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(1,\infty)\subset D=$
$\mathbf{R}\setminus\left[-\frac{1}{2},0\right]$.
1.203A Produsul soluţiilor ecuaţiei $x^{\log_2 x-2}=256$ este $x_1\cdot x_2=4$. Logaritmăm, $\log_2 x=t$, $t^2-2t-8=0$, $t_{1,2}=1\pm\sqrt{1+8}$, $t_1=4$, $t_2=-2$
$\Rightarrow x_1\cdot x_2=4$.
1.204A Soluţia ecuaţiei $\log_3 x+\log_5 x=1$ verifică relaţia $\ln x=\frac{\ln 3\cdot\ln 5}{\ln 3+\ln 5}$,
$\frac{\ln x}{\ln 3}+\frac{\ln x}{\ln 5}=1$, $\ln x=\frac{\ln 3\cdot\ln 5}{\ln 5+\ln 3}$.
1.205A Soluţia sistemului $\begin{cases}x^2+16y^2=17\\ \log_2 x-\log_4 y=3\end{cases}$ verifică relaţia $xy=1$.
$\log_2 x=2\log_4 x=\log_4 x^2\Rightarrow\log_2 x-\log_4 y=\log_4\frac{x^2}{y}=3$, $\frac{x^2}{y}=4^3$, $y=\frac{x^2}{64}$,
$x^2+\frac{x^4}{256}=17$, $(x^2)_{1,2}=-128\pm\sqrt{128^2+17\cdot 256}=-128\pm 3\cdot 2^4=16(-8\pm 3)$.
1.206A Soluţiile ecuaţiei $\ln^2 x-4\ln x+3=0$ sunt $\ln x=1$, $x=e$, $\ln x=3$,
$x=e^3$.
1.207A Dacă $\alpha=\log_{40}100$ şi $\beta=\log_{10}20$ atunci $\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}$. $\alpha=\frac{\lg 100}{\lg 40}=$
$\frac{2}{1+2\lg 2}$, $\beta=\lg_2+1$, $\lg 2=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)$, $\beta=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}$.
1.208A Inegalitatea $3^x+4^x+5^x<6^x$ este verificată pentru $x>3$. Funcţia

$f(x)=\left(\frac{3}{6}\right)^x+\left(\frac{4}{6}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x$ este descrescătoare (sumă de funcţii descrescătoare,
$y=a^x$ este descrescătoare pentru $0<a<1$), $f(3)=1$, $f(x)<1$ pentru
$x>3$ (vezi 1.253, $3^x+4^x+5^x\ge 6^x$, $x\le 3$).
1.209A Soluţia ecuaţiei $3^{x+1}=9^{\sqrt{x}}$ este $x=1$: $3^{x+1}=3^{2\sqrt{x}}\Rightarrow x+1=$
$2\sqrt{x}\Rightarrow(\sqrt{x}-1)^2=0$, $x=1$.
1.210A Ecuaţia $2^{3x}-2^{x+1}-4=0$ are soluţia $x=1$; $(2^x)^3-2\cdot 2^x-4=$
$0\Rightarrow 2^x=2$ (soluţie reală unică) deci $x=1$.
1.211A $3^{\log_{\frac{1}{2}}x}>1=3^0\Rightarrow\log_{\frac{1}{2}}x>0=\log_{\frac{1}{2}}1\Rightarrow x\in(0,1)$.
1.212A Ecuaţia $x^{\log_{x^2}(x^2-1)}=8$ are soluţia $x=\sqrt{65}$. Se verifică direct, $(\sqrt{65})^{\log_{65}64}=(65)^{\frac{1}{2}\log_{65}64}=(65)^{\log_{65}\sqrt{64}}=8(a^{\log_a x}=x)$. Altfel:
$(x^2)^{\log_{x^2}\sqrt{x^2-1}}=8\Rightarrow\sqrt{x^2-1}=8$, $x=\sqrt{65}$.
1.213A Inecuaţia $\ln e^x+e^{\ln x}<2$ deci $2x<2$ are soluţia $0<x<1$.
1.214A Produsul soluţiilor ecuaţiei $\log_4^2(x+1)-3\log_2(2x+2)=\frac{33}{4}$ este
$7(2^{-3}-2^{12})$: $\log_2(2x+2)=1+\log_4(x+1)^2$, $\log_4(x+1)=t$, $t^2-6t-\frac{45}{4}\Rightarrow$
$t_{1,2}=\frac{15}{2},-\frac{3}{2}$, $x_1=2^{15}-1$, $x_2=-\frac{7}{8}$, $x_1x_2=7(2^{-3}-2^{12})$.
1.215A Soluţia ecuaţiei $\log_{|x|}2=2$ este $\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ deoarece $|x|^2=2\Rightarrow$
$|x|=\sqrt{2}$, $x=\pm\sqrt{2}$.
1.216A Numărul n al soluţiilor reale ale ecuaţiei $(7^x-3)(7^x+1)=0$ este
$n=1$ deoarece $7^x=-1$ nu are soluţii iar $7^x=3$ are o soluţie $x=\log_7 3$.
1.217A Să se rezolve ecuaţia $x^{\lg x}=100x$, $x>0$. $(\lg x)^2=2+\lg x$.
$(\lg x)_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}$, $\lg x=2$, $x=100$, $\lg x=-1$, $x=\frac{1}{10}$.
1.218A $\log_{16}(x-2)+\log_2 5=10\Rightarrow x=2+16^{10-\log_2 5}=2+\frac{16^{10}}{5^4}$.
1.219A Dacă $a\in(0,1)$, numerele $m=a^{1+\sqrt{6}}$, $n=a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ verifică inegalitatea $m<n$ deoarece exponenţiala cu baza subunitară este descrescătoare
(inversează inegalităţile) deci $1+\sqrt{6}>\sqrt{2}+\sqrt{3}\Rightarrow 7+2\sqrt{6}>5+2\sqrt{6}$.
1.220B Valorile parametrului real m pentru care $\{x\in\mathbf{R}|(m-1)e^x+2m+$
$me^{-x}>0\}=R$ sunt $m\ge 1$, $m\in[1,\infty)$: $m(e^x+2+e^{-x})>e^x$, $m>\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^2$,
$0<\frac{e^x}{e^x+1}<1$, $\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^2$ este 1 la $+\infty$ şi minimă 0 la $-\infty$, deci $m>1$.
1.221B Fie k numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $3^{x+3}+9=\sqrt{81^{2x-1}}+3^{4x}$.
Atunci $k=1$. Notând $3^x=t$ obţinem $27t+9=\frac{10}{9}t^4$ dreapta $27t+9=u$ taie
în două puncte curba $u=\frac{10}{9}t^4$ unul cu $t<0$ şi unul cu $t>0$ deci ecuaţia
are o singură soluţie reală.
1.222B Fie $M=\{x\in(0,\infty)|3^{\log_6 x}+4^{\log_6 x}+5^{\log_6 x}=x$. Atunci
$M\in(200,300)$. Notăm $\log_6 x=t$, $x=6^t$ şi obţinem ecuaţia $3^t+4^t+5^t=6^t$
cu soluţia cunoscută $t=3$, deci $x=6^3$ (vezi 1.208A).
1.223B Pentru sistemul $x^{y^2-3y+3}=x$, $x+2y=5$ notăm A familia perechilor

$(x,y) \in \mathbf{R}^2$ care verifică sistemul şi $S = \sum_{(x,y)\in A} (x^2+y^2)$. Atunci $S = \frac{125}{4}$.
$x = 0$, $y = \frac{5}{2}$, $x = 1$, $y = 2$ şi $x = -1$, $y = 3$ constituie evident soluţii. Fie $x \neq 1$, $x > 0 \Rightarrow y^2 - 3y + 3 = 1$, $y_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm1}{2}$, $y_1 = 2$, $y_2 = 1$ deci perechile soluţii sunt $(0,\frac{5}{2})$, $(1,2)$, $(-1,3)$, $(3,1)$, $S = \frac{125}{4}$.

1.224B Să se calculeze $\operatorname{Im} f$ unde $f(x) = \frac{4^x-6^x-9^x}{4^x+6^x+9^x}$; $f(x) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x}$, notăm $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, $u = g(t) = \frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}$; $\operatorname{Im} f$ este proiecţia graficului funcţiei $u = g(t)$ în planul (t,u) pe axa Ou luat pentru $t > 0$. Rezultă uşor $\operatorname{Im} f = \left[\frac{1}{3}, 1\right)$. Algebric, punem condiţia ca ecuaţia $\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1} = u$ să aibă rădăcini $t_1, t_2 \in \mathbf{R}_+^*$ şi $t > 0$.

1.225B Fie $a > 0$ şi $M = \{x \in \mathbf{R} | a^{\sqrt{x}} \geq a^{2-x}\}$. Să se decidă: a) $(\exists) a > 0 \Rightarrow M = \emptyset$; b) M este nemărginită $(\forall) a > 0$; c) $(\exists) a > 0 \Rightarrow M$ nu este un interval; d) $2 \in M$, $(\forall) a > 0$; e) M este interval închis $(\forall) a > 0$; f) toate afirmaţiile precedente sunt false. Inegalitatea se scrie $a^{x+\sqrt{x}-2} \geq 1$ şi rezultă 1° pentru $0 < a < 1 \Rightarrow x + \sqrt{x} - 2 \leq 2$, $0 < x < 1$; 2° $1 \leq a \Rightarrow x + \sqrt{x} - 2 > 0 \Rightarrow 1 < x$. Din cele arătate rezultă că a) - e) sunt false.

1.226B Fie S suma soluţiilor ecuaţiei $(3x-1)^{x^2} = (3x-1)^{2x+3}$. Atunci $S = 3$. Dacă $3x - 1 = 1$ ecuaţia se verifică deci $x_0 = \frac{2}{3}$ este soluţie; $x \neq \frac{2}{3} \Rightarrow x^2 = 2x + 3$ deci $x_1 = -1$, $x_2 = 3$; dar $3x - 1 = 0$, $x = \frac{1}{3}$ verifică deci $S = 3$.

1.227B Suma S a soluţiilor ecuaţiei $6^x + 8^x + 15^x = 9^x + 12^x + 10^x$ este $2^x \cdot 3^x + (2^x)^3 + 3^x \cdot 5^x = (3^x)^2 + (2^x)^2 \cdot 3^x + 2^x \cdot 5^x$, $2^x[3^x + (2^x)^2 - 5^x] = 3^x[3^x + (2^x)^2 - 5^x] \Rightarrow (3^x - 2^x)(3^x + 2^{2x} - 5^x) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

1.228B Fie $M = \{x \in \mathbf{Z} | 2x + 1 < 3\log_3(x+5)\}$ şi $m \in \mathbf{N}$ numărul elementelor lui M. Avem $m = 7$. Comparăm ordonatele corespunzătoare absciselor numere întregi ale dreptei $y = 2x + 1$ şi logaritmului $y = \log_3(x+5)^3$, $(x > -5)$ şi observăm că dreapta este sub logaritm pentru $x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ deci $m = 7$.

1.229B Suma S a inverselor soluţiilor ecuaţiei

$$(\log_x 6)^2 + \left(\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 + \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(\frac{1}{6}\right) + \log_{\sqrt{6}} x + \frac{3}{4} = 0$$

este $S \in (38,39)$. Notăm $\log_x 6 = t$ şi obţinem $t^2 + \frac{1}{t^2} + 2\left(t + \frac{1}{t}\right) + \frac{3}{4} = 0$, $t + \frac{1}{t} = u \Rightarrow u^2 - 2 + 2u + \frac{3}{4} = 0$, $u^2 + 2u - \frac{5}{4} = 0$, $u_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+5}}{2} = -\frac{2\pm3}{2}$, $t + \frac{1}{t} = -\frac{5}{2} \Rightarrow t_1 = -2, t_2 = -\frac{1}{2}$, $\log_x 6 = -2$, $x^{-2} = 6$, $\frac{1}{x_1} = \sqrt{6}$, $\log_x 6 = -\frac{1}{2}$, $x^{-\frac{1}{2}} = 6$, $\frac{1}{x_2} = 36$, $x_1 + x_2 = S \in (38,39)$.

1.230B Soluţia inecuaţiei $2(\sqrt{3}+1)^{-x} + 2^x(2+\sqrt{3})^x > 3$ este $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. $(\sqrt{3}+1)^2 = 2(2+\sqrt{3})$, $2(\sqrt{3}+1)^{-x} + (\sqrt{3}+1)^{2x} > 3$, $(\sqrt{3}+1)^x = t > 0 \Rightarrow \frac{2}{t} + t^2 > 3$, $t^3 - 3t + 2 > 0$ $(t-1)^2(t+2) > 0$ deci $\forall x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$.

1.231B Să se rezolve inecuaţia $\left(\frac{3}{4}\right)^{10-6x-x^3} < \frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$. Avem $10 - 6x - x^3 > 3$, $x^3 + 6x - 7 < 0$, $(x-1)(x^2+x+7) < 0$, $x < 1$.

1.232B Fie funcţiile $f : (0,\infty) \to R$, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $h = g \circ f$. Atunci f, g sunt descrescătoare iar h crescătoare. Logaritmul şi exponenţiala în baze subunitare sunt descrescătoare iar compunerea a două funcţii descrescătoare este crescătoare, verificarea se face uşor.

1.233B Valorile lui $a \in \mathbf{R}$ pentru care ecuaţia $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + a = 0$ are două soluţii reale distincte. Deoarece $(2^x)_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-4a}}{2}$ condiţiile sunt $9 - 4a > 0$ deci $a < \frac{9}{4}$ şi $a > 0$ pentru ca $3 - \sqrt{9-4a} > 0$ $(2^x > 0)$. Rezultă $0 < a < \frac{9}{4}$.

1.234B Inecuaţia $\log_4 x + \log_x 4 < \frac{5}{2}$ $(x > 0, x \neq 1)$ are soluţia $x \in (0,1) \cup (2,16)$. Cu $\log_4 x = t$ avem $t + \frac{1}{t} < \frac{5}{2}$, $\frac{2t^2-5t+2}{t} < 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow t \in (-\infty,0) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ şi $x \in (0,1) \cup (2,16)$.

1.235B Soluţia inecuaţiei $\log_x(3x) \leq 2$ este $x \in (0,1) \cup (3,\infty)$. Pentru $x \in (0,1)$, $\log_x 3x \leq \log_x x^2 \Rightarrow 3x > x^2$, $x \in (0,3)$ deci $x \in (0,1)$ iar pentru $1 < x$, $3x < x^2 \Rightarrow x > 3$; soluţia este $(0,1) \cup (3,\infty)$.

1.236B Ecuaţia $4^x - (m+1)2^x + m = 0$ are exact o soluţie reală dacă pentru ecuaţia $t^2 - (m+1)t + m = 0$, $t = 2^x$, $t > 0$, $\Delta = 0$ sau $\Delta > 0$ şi $P = t_1t_2 < 0$ (deci t_1, t_2 au semne contrare) şi cum $t = 2^x > 0$ una singură este reală. Rezultă $\Delta = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2 \geq 0$, $\Delta = 0$ dacă $m = 1$; $t_1t_2 = m < 0$ deci avem o singură soluţie dacă $m \in (-\infty, 0] \cup \{1\}$.

1.237B Soluţia ecuaţiei $9 \cdot 3^{2x} + 9 \cdot 3^x = 810$ este $x = 2$: $(3^x)^2 + 3^x - 90 = 0$, $(3^x)_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+360}}{2} = \frac{-1\pm19}{2}$, $3^x = 9$, $x = 2$.

1.238B Mulţimea $A = \left\{x \in \mathbf{R} \middle| \log_9^2 x \geq \log_3^2 \sqrt{1-\frac{x}{4}}\right\}$ unde $x \in (0,4)$ este $A = \left(0, \frac{4}{5}\right)$; $\log_3^2 \sqrt{1-\frac{x}{4}} = \log_9^2\left(1-\frac{x}{4}\right) \Rightarrow \left(\frac{\log_9\left(1-\frac{x}{4}\right)}{\log_9 x}\right)^2 \leq 1$ sau $-1 \leq \frac{\log_9\left(1-\frac{x}{4}\right)}{\log_9 x} \leq 1$, $0 \leq \frac{\log_9 x\left(1-\frac{x}{4}\right)}{\log_9 x}$, $\frac{\log_9 \frac{4-x}{4x}}{\log_9 x} \leq 0$. Făcând semnul celor trei logaritmi şi tabloul global al semnelor rezultă $A = \left(0, \frac{4}{5}\right)$.

1.239B Imaginea $\operatorname{Im} f$ unde $f(x) = \frac{3^x-4}{3^x+2}$ este intervalul $(-2,1)$. Construim graficul funcţiei $y = \frac{3^x-4}{3^x+2}$ sau al funcţiei $u = \frac{t-4}{t+2}$ pentru $t > 0$ în planul (t,u) sau rezolvăm în raport cu t ecuaţia $u = \frac{t-4}{t+2}$, $t = \frac{4+2u}{1-u}$ şi punem condiţia $t > 0$ deci $-2 < u < 1$ sau încă: $u = 1 + \frac{-6}{t+2}$ şi succesiv avem $0 < t < \infty$, $2 < t + 2 < \infty$, $0 < \frac{1}{t+2} < \frac{1}{2}$, $-3 < \frac{-6}{t+2} < 0$, $-2 = -3 + 1 < 1 - \frac{6}{t+2} < 1$.

1.240B Soluţia inecuaţiei $2^{\sqrt{4-x}} < 4^{\frac{x}{2}}$ este $A = \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, 4\right]$; $2^{\sqrt{4-x}} < 2^x$,

$x \le 4 \Rightarrow 0 \le \sqrt{4-x} < x$, $x^2+x-4>0$, $x > \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

1.241B Valorile lui $x \in \mathbf{R}$ pentru care $2^{3x-1}+2^{3(2-x)}-33<0$; notăm $2^{3x-1}=t$, $t^2-33t+32<0$, $(t-1)(t-32)<0$, $t\in(1,32)$, $x\in(\frac{1}{3},2)$.

1.242B Soluţia ecuaţiei $3^{x+1}+5\cdot3^{x-1}-7\cdot3^x+21=0$ este $x=2$, $-7\cdot3^x+7\cdot9=0$, $3^x=9$, $x=2$.

1.243C Dacă $x\in(0,\infty)\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ şi $a=\log_2 x$, $b=\log_{2x}2$, atunci $(1+a)b=1$. $b=\log_{2x}2=\frac{1}{\log_2 2x}=\frac{1}{1+\log_2 x}=\frac{1}{1+a}\Rightarrow(1+a)b=1$.

1.244C Dacă $E=\log_x(x-1)+\log_{x-1}x+2$, calculaţi $E\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)$. Dacă $x=\frac{1+\sqrt5}{2}$, $x-1=\frac{-1+\sqrt5}{2}=\frac{2}{1+\sqrt5}=\frac{1}{\frac{1+\sqrt5}{2}}$, deci $\log_{\frac{1+\sqrt5}{2}}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}-1\right)=\log_{\frac{1+\sqrt5}{2}}\frac{1}{\frac{1+\sqrt5}{2}}=-1$. Analog $\log_{\frac{-1+\sqrt5}{2}}\frac{1+\sqrt5}{2}=-1$, deci $E\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)=0$.

1.245C Soluţia ecuaţiei $2^{\sqrt{x-2}}+3^{\sqrt{x^2-2}}+4^{\sqrt{x^2-x-2}}=3$ este $x=2$ deoarece $x=2$ verifică ecuaţia şi funcţia definită de membrul stâng este ≥ 3.

1.246C Valorile lui m pentru care ecuaţia $(m-2)4^x+(2m-3)2^{x+1}+5m-6=0$ are o singură soluţie reală sunt $m\in\left(\frac{6}{5},2\right)$. Vezi şi 1.236B. Pentru ecuaţia $(m-2)t^2+(2m-3)2\cdot t+5m-6=0$ punem condiţiile $\Delta=0$ şi $P=t_1\cdot t_2=\frac{5m-6}{m-2}<0$. Rezultă $m\in\left(\frac{6}{5},2\right)$.

1.247C Dacă $0<a<b<1$ şi $E=\log_a\frac{2ab}{a+b}+\log_b\frac{2ab}{a+b}$, atunci $E>2$. Deoarece $a<b<1\Rightarrow\log_b a>\log_b b=1$ deci şi $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}>0$; $\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}\Rightarrow\log_a\frac{2ab}{a+b}>\frac{1}{2}(\log_a a+\log_a b)$, $\log_b\frac{2ab}{a+b}>\frac{1}{2}(\log_b a+\log_b b)$ şi adunând avem $\log_a\frac{2ab}{a+b}+\log_b\frac{2ab}{a+b}>1+\frac{1}{2}\left(\log_b a+\frac{1}{\log_a b}\right)>2$.

1.248C Inecuaţia $\sqrt{\log_2\frac{3-2x}{1-x}}<1$ este verificată pentru $x>2$. Domeniul de definiţie: $\frac{3-2x}{1-x}\ge1$, $\frac{2-x}{1-x}\ge0$, $x\in(-\infty,1)\cup[2,\infty)$ iar $\log_2\frac{3-2x}{1-x}<1=\log_2 2\Rightarrow\frac{3-2x}{1-x}<2$, $\frac{1}{1-x}<0$, $x>1$. Intersecţia este $x\ge2$.

1.249C Numărul de soluţii ale sistemului $\begin{cases}3^x+4^y=13\\ \log_3 x-\log_4 y=1\end{cases}$. Putem scrie $y=\log_4(13-3^x)$, $y=\frac{1}{4}x^{\log_3 4}$ şi intersectăm cele două grafice: rezultă un singur punct de intersecţie o singură soluţie, prima funcţie descreşte de la $\log_4 12$ în $x=0$ la 0 în punctul $x=\log_3 12$, iar a doua funcţie creşte de la 0 la ∞ (putere supraunitară). Altfel, $x=3^{\log_4(4y)}\Rightarrow3^{3\log_4(4y)+4^y}=13$ are soluţie unică.

1.250C Fie $A=\{x\in\mathbf{Z}|3x+1<2\log_2(x+4)\}$ şi S suma elementelor sale. Atunci $S=1$. Procedăm ca în 1.228B intersectăm dreapta $y=3x+1$ cu logaritmul $y=\log_2(x+4)^2$ şi obţinem $x=-3,-2,-1,0,1$ deci $S=-5$.

1.251C Fie $S=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\log_2 k}+\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\log_3 k}+\ldots+\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\log_n k}$; atunci $S=1$. $S=\frac{1}{\log_2 n!}+\frac{1}{\log_3 n!}+\ldots+\frac{1}{\log_n n!}=\log_{n!}2+\log_{n!}3+\ldots+\log_{n!}n=\log_{n!}n!=1$.

1.252C Câte soluţii are sistemul $x^{2x+y}=y^\alpha$, $y^{2x+y}=x^{-\alpha}$? Avem $y=x^{\frac{2x+y}{\alpha}}$, $y=x^{\frac{-\alpha}{2x+y}}\Rightarrow\frac{2x+y}{\alpha}=\frac{-\alpha}{2x+y}$ (dacă $x\ne1$) deci $(2x+y)^2+\alpha^2=0$; rezultă că are numai soluţia $x=y=1$.

1.253C Inegalitatea $3^x+4^x+5^x>6^x$ este verificată pentru $x<3$ (vezi 1.208A).

1.254C Ecuaţia $\sqrt{\log_\alpha\alpha x+\log_x\alpha x}+\sqrt{\log_\alpha\frac{x}{\alpha}+\log_x\frac{\alpha}{x}}=2\sqrt{\alpha}$, $\alpha>0$, $\alpha\ne1$ are soluţiile $x=\alpha^\alpha$, $x=\alpha^{\frac{1}{\alpha}}$. Ecuaţia se scrie

$$\sqrt{2+\log_\alpha x+\log_x\alpha}+\sqrt{-2+\log_\alpha x+\log_x\alpha}=2\sqrt{\alpha}$$

şi rezultă $\log_\alpha x>0$ deci $x>1$ pentru $\alpha>1$ şi $x<1$ pentru $\alpha<1$. Notăm $\log_\alpha x=t$, $\sqrt{2+t+\frac{1}{t}}+\sqrt{-2+t+\frac{1}{t}}=2\sqrt{\alpha}$, $\left|\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right|+\left|\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right|=2\sqrt{\alpha}\Rightarrow$ pentru $\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}>0$ deci $t>1$, $2\sqrt{t}=2\sqrt{\alpha}$, $t=\alpha$, $\log_\alpha x=\alpha$, $x=\alpha^\alpha$; pentru $\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}<0$ deci $t<1$, $\frac{2}{\sqrt{t}}=2\sqrt{\alpha}$, $t=\frac{1}{\alpha}$, $\log_\alpha x=\frac{1}{\alpha}$, $x=\alpha^{\frac{1}{\alpha}}$; pentru $\alpha<1$ evident nu are soluţie, deoarece membrul stâng >2.

1.255C Inecuaţia $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3)>\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$ are soluţia $(-2,-\sqrt3)\cup(\sqrt3,3)$. Domeniul de definiţie este $(-3,-\sqrt3)\cup(\sqrt3,\infty)$ (din $x^2-3>0$, $x+3>0$) iar din $x^2-3<x+3$ rezultă $(-2,3)$ deci soluţia este $(-2,-\sqrt3)\cup(\sqrt3,3)$.

1.256C Să se rezolve inecuaţia $\log_{2^x}(2^{2x}+|x|)>2$. $\log_{2^x}(2^{2x}+|x|)>\log_{2^x}(2^x)^2$ deci pentru $2^x<1$ $(x<0)\Rightarrow2^{2x}+|x|<2^{2x}$, $|x|<0$, $x\in\emptyset$; pentru $2^x>1$ $(x>0)\Rightarrow2^{2x}+|x|>2^{2x}$, $|x|>0$ deci $x\in(0,\infty)$.

1.3 Numere complexe. Combinatorică. Polinoame

1.257A $i+i^3+i^5+\ldots+i^{99}=i-i+i-i+i-i+\ldots+i-i=0$ $(i^{99}=i^{4\cdot24+3}=i^3=-i)$. Altfel $i(1+i^2+i^4+\ldots+(i^2)^{49})=i\cdot\frac{1-(i^2)^{50}}{1-i^2}$.

1.258A $|\sqrt{x^2+1}+i\sqrt{y-2}|=1$ $(y>2)\Leftrightarrow x^2+1+y-2=1\Rightarrow y=2-x^2$.

1.259A Fie $\varepsilon=\frac{-1\pm\sqrt3}{2}$ şi $S=(2\varepsilon+\varepsilon^2)(2\varepsilon^2+\varepsilon)$, atunci $S=3$. Avem $\varepsilon^3=1$, $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0\Rightarrow S=(\varepsilon-1)(\varepsilon^2-1)=\varepsilon^3+1-\varepsilon-\varepsilon^2=3$.

1.260A Dacă $z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}}$, atunci $|z|^4 = 1 : z = \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}{4} =$
$\frac{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})+2i\sqrt{4-3}}{4} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$.
1.261A Dacă z verifică ecuaţia $|z| + z = 8 + 4i$ atunci $|z| = 5$, $\sqrt{x^2+y^2}+$
$x + yi = 8 + 4i$, $y = 4$, $\sqrt{x^2+y^2} + x = 8$, $16x = 48$, $x = 3$, $|z| = 5$.
1.262A Fie $z = (x+iy)^n + (x-iy)^n$ unde $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ şi $n \in \mathbf{N}$. Cât este n pentru ca z să fie real? $z = [\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n + [\rho(\cos\theta - i\sin\theta)]^n =$
$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) + \rho^n(\cos n\theta - i\sin n\theta) = 2\rho^n \cos n\theta$, deci orice $n \in N$ verifică. Altfel, se dezvoltă cu binomul lui Newton, $z = A + iB$ unde $B = 0$.
Mai observăm că $w = u + iv$, $\bar{w}^n = \overline{w^n}$, $w^n + \bar{w}^n = w^n + \overline{w^n} \in R$.
1.263A Dacă $S_n = 1\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3\cdot 7 + \ldots + n(2n+1)$, atunci $S_n = \frac{1}{6}(4n^3+9n^2+$
$5n)$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = 2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$.
1.264A Prin inducţie se arată că $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$. Pentru $n = 1$
este adevărată. $P_n \to P_{n+1}$: deci ar trebui ca $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} <$
$2\sqrt{n+1}$; dar $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ şi rămâne să arătăm
că $2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$, deci $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
1.165A Inegalitatea $2^n > n^2$ se verifică prin inducţie pentru $n > 5$.
1.266A $S = \frac{C_1^0}{C_1^1} + \frac{C_2^1}{C_2^2} + \frac{C_3^2}{C_3^3} + \ldots + \frac{C_n^{n-1}}{C_n^n}$ are valoarea $S = C_{n+1}^{n-1}$. $C_k^k = 1$,
$C_k^{k-1} = C_k^1 = k$ deci $S = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^{n-1}$.
1.267A Egalitatea $\sum_{k=1}^{n} k(ak+b) = 2C_{n+1}^3$ verificată pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ are
loc pentru $a = b = 1$. $a\sum_{k=1}^{n} k^2 + b\sum_{k=1}^{n} k = a\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + b\frac{n(n+1)}{2} =$
$\frac{n(n+1)}{6}[a(2n+1)+3b] = \frac{2(n+2)(n+1)n}{6}$ $(\forall)n$, $2a = 2$, $a + 3b = 4$.
1.268A Valorile lui $a, b \in \mathbf{R}$ astfel ca ecuaţiile $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + a = 0$,
$x^3+x^2-x+b = 0$ să aibă o rădăcină dublă comună sunt $a = b = -1$. Pentru ecuaţia a doua x_1 rădăcina dublă anulează şi derivata deci $3x^2 + 2x - 1 = 0$,
$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+3}}{3}$, $x_1 = -1 \Rightarrow b = -1 = a$, $x_2 = \frac{1}{3}$ nu verifică. Altfel identificând coeficienţii: $(x-\alpha)^2(x-\beta) \equiv x^3 - x^2 - x + b \Rightarrow 2\alpha + \beta = -1$,
$\alpha^2 + 2\alpha\beta = -1$ deci $3\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$, $\alpha = -1$ etc.
1.269A Valorile lui $m \in \mathbf{R}$ astfel încât rădăcinile ecuaţiei $x^4 + 3x^3 + mx^2 +$
$3x + 1$ să fie toate reale. Separăm pe m, $m = -\frac{x^4+3x^3+3x+1}{x^2}$, facem graficul funcţiei $f(x) = \frac{x^4+3x^3+3x+1}{x^2}$ îl intersectăm cu $y = -m$ şi luăm valorile lui m pentru care se intersectează în patru puncte. Algebric, rezolvăm ecuaţia

reciprocă cu schimbarea $t = x + \frac{1}{x}$. $t^2 + 3t + m - 2 = 0$, $t_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{17-4m}}{2}$,
$m \le \frac{17}{4}$, $x + \frac{1}{x} = t_{1,2}$, $\Delta = t_{1,2}^2 - 4 \ge 0$, $t_{1,2} \le -2$, $2 \le t_{1,2}$, $m \le -8$.
1.270A $S = P(x_1) + P(x_2) + P(x_3)$ unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei
$x^3+3x+1 = 0$ iar $P(x) = x^4+2x^3-x^2+3x-2$, are valoarea $S = 12$. $S_1 =$
$x_1+x_2+x_3 = 0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = 3$. $S_2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2-$
$2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) = -6$, $S_3 = x_1^3+x_2^3+x_3^3 = -3(x_1+x_2+x_3)-3 = -3$,
$S_4 = x_1^4+x_2^4+x_3^4 = -3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1+x_2+x_3) = -3\cdot(-6) = 18$ deci
$S = S_4 + 2S_3 - S_2 + 3S_1 - 6 = 18 - 6 + 6 - 6 = 12$.
1.271A Restul împărţirii polinomului f la x^3-2 este egal cu pătratul câtului.
Să se afle câtul dacă $f(-2) + f(2) + 34 = 0$: avem $f = (x^3-2)(ax+$
$b) + (ax+b)^2$ şi utilizând relaţia obţinem $4a^2 + 16a + b^2 - 2b + 17 = 0$,
$4(a+2)^2 + (b-1)^2 = 0$ deci $a = -2$, $b = 1$.
1.272A Pentru care $m \in \mathbf{R}$, ecuaţia $x^4 + mx^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$ are două
soluţii duble: $(x-a)^2(x-b)^2 = 0$ $(x^2-(a+b)\lambda+ab)^2 = 0$, $a + b = s$,
$ab = p$, $(x^2-sx+p)^2 = 0$, $x^4 + s^2x^2 + p^2 - 2sx^3 + 2px^2 - 2psx = 0$, $p^2 = 4$,
$p = \pm 2$, $s^2 + 2p = -3$, $-2s = m$, $-2ps = -4$ deci $p = -2$, $s = -1$, $m = 2$.
Altfel, cu Viétte: $x_1+x_2+x_3+x_4 = -m$, $(x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4 =$
-3, $(x_1+x_2)x_3x_4 + (x_3+x_4)x_1x_2 = 4$, $x_1x_2x_3x_4 = 4 \Rightarrow x_1 + x_3 = -\frac{m}{2}$,
$4x_1x_3 + x_1^2 + x_3^2 = -3$, $x_1x_3(x_1+x_3) = 2$, $(x_1x_3)^2 = 4$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$,
$f = (x^2+x-2)^2$.
1.273A Cel mai mare divizor comun al polinoamelor $f = (x^2+2x+3)^2-$
$5(x^2+2x+3)+6$, $g = x^3+4x^2+3x$ este $h = x(x+1)$ deoarece $x = 0$ şi
$x = -1$ sunt rădăcini comune lui f şi g dar $x = -3$ nu este rădăcină pentru
f dar este pentru g.
1.274A Să se determine perechea (a, m) de numere reale astfel ca polinomul
$f = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ să se dividă prin polinomul $g = x^2 - x + m$.
Împărţim f la g şi obţinem restul $(a-5m+2)x + (2-am+6m^2+m) \equiv 0 \Rightarrow$
$a - 5m + 2 = 0$, $2 - am + 6m^2 + m = 0$ deci perechile $(-7,-1)$ şi $(-12,-2)$
(ecuaţia care îl dă pe m este $m^2 + 3m + 2 = 0$).
1.275A Valoarea lui n din egalitatea $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+n} = \frac{15}{8}$
este $n = 15$: $S = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+3+\ldots+k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)} = 2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n-2}-\right.$
$\left.-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1} = \frac{15}{8} \Rightarrow n = 15$.
1.276A Numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^{100}$ este
$n = 17$. $T_{k+1} = C_{100}^k 2^{\frac{100-k}{2}} \cdot 3^{\frac{k}{3}} \Rightarrow k = 3p$, $\frac{100-3p}{2} = 50 - 3\frac{p}{2}$ deci $p = 2m$,
$k = 6m$, $m = 0, 1, \ldots, 16$, $n = 17$.
1.277A Să se calculeze sumele $S_1 = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$, $S_2 = C_n^1 + C_n^3 +$

$C_n^5 + \ldots : 2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$, $0 = (1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots$; $S_1 = \frac{2^n+0}{2} = 2^{n-1} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$; $S_2 = \frac{2^n-0}{2} = 2^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$.

1.278A $S = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = \sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)-1]k! = -\sum_{k=1}^{n}[k! - (k+1)!] = -[1! - 2! + 2! - 3! - n! + n! - (n+1)!] = (n+1)! - 1$.

1.279A $\mathrm{Im}\frac{1-i}{1+i} = \mathrm{Im}\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \mathrm{Im}\frac{-2i}{2} = \mathrm{Im}(-i) = -1$ $(\mathrm{Im}(x+iy) = y)$.

1.280A $E = (1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (2i)^2 = -4$.

1.281A Dacă $iz \in \mathbf{R}$ şi $|z| = 2 \Rightarrow z = i(x+iy) = -y + ix \in \mathbf{R}$, $|z| = |y| = 2$, $\Rightarrow x = 0$ deci $z \in \{\pm 2i\}$.

1.282A Dacă $z \neq 1$ şi $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$, atunci $|z'| = \frac{|x-1+iy|}{|(-x+1)+iy|} = \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = 1$.

1.283A Numerele complexe $z_1 = 2+2i$, $z_2 = -1+i$, $z_3 = -2-2i$, $z_4 = 1-i$ sunt vârfurile unui romb deoarece diagonalele sunt perpendiculare şi se înjumătăţesc.

1.284A $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$, $x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow x = -\frac{4}{11}$, $y = -\frac{5}{11}$. Se obţine sistemul $x + 3y = 1$, $2x - 5y = -3 \Rightarrow x = -\frac{4}{11}$, $y = -\frac{5}{11}$.

1.285A Dacă $\alpha \in \mathbf{R}$ atunci $\left|\frac{\alpha+i}{\alpha-i}\right| = \frac{|\alpha+i|}{|\alpha-i|} = \frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\sqrt{\alpha^2+1}} = 1$.

1.286A Termenul care nu conţine pe x din dezvoltarea $(ax^{-\frac{1}{2}} + xa^{-\frac{1}{2}})^{30}$ este $T_{11} : T_{k+1} = C_{30}^k (ax^{-\frac{1}{2}})^{30-k}(xa^{-\frac{1}{2}})^k = C_{30}^k x^{\frac{3k-30}{2}} a^{30-\frac{3k}{2}}$, $3k - 30 = 0$, $k = 10$.

1.287A Soluţiile inecuaţiei $C_{2x}^2 < 15$ sunt $x \in \left\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right\} : 2x \geq 2$, $x \geq 1$, $2x = 2, 3, 4, 5, \ldots$ dar $\frac{2x(2x-1)}{2} < 15$, deci $x = 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$.

1.288A Valoarea expresiei $E = \frac{A_n^2}{A_n^1 - A_n^3} = \frac{n(n-1)}{n-n(n-1)(n-2)} = \frac{n-1}{-n^2+3n-1}$.

1.289A Numărul $x = C_6^4 + A_5^2 - P_4$ are valoarea $11 : x = \frac{6\cdot 5}{2} + 5\cdot 4 - 4! = 11$.

1.290A Termenul care conţine pe x şi y la puteri egale în dezvoltarea $\left(x\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2000}$ este $T_{1001} : T_{k+1} = C_{2000}^k x^{2000-\frac{3k}{2}} y^{\frac{2000-k}{2}} \Rightarrow 2000 - \frac{3k}{2} = \frac{2000-k}{2}$, $k = 1000$.

1.291A Dacă $x \in \mathbf{N}^*$ divide pe $n(n+1)$ atunci x este număr par deoarece produsul a două numere naturale consecutive este număr par.

1.292A Dacă n este numărul soluţiilor ecuaţiei $2C_x^2 + 6C_x^3 = 9x$, $n = 1$: $x \geq 3$, $2\frac{x(x-1)}{2!} + 6\frac{x(x-1)(x-2)}{3!} = 9x \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$, deci $x = 4$, $n = 1$.

1.293A Suma coeficienţilor polinomului $P(x) = (8x^3 - 7)^{10}$ este $1 / 1 = P(1)$.

1.294A Numărul $C_{5n+4}^{n^2+3n-4}$ este definit pentru $n = 1, 2, 3, 4$; $5n + 4 \geq n^2 + 3n - 4 \Rightarrow n^2 - 2n - 8 \leq 0$, $0 \leq n \leq 4$, dar $n \neq 0$.

1.295A Numerele naturale n pentru care dezvoltarea $\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ conţine termeni independenţi de x sunt de forma $n = 5p : T_{k+1} = C_n^k x^{2n-\frac{5k}{2}}$, $n = \frac{5k}{4}$, $k = 4p$, deci $n = 5p$, $p \in \mathbf{N}^*$.

1.296A $S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = n(n+1) - n = n^2$.

1.297A Dacă $\underbrace{111\ldots11}_{n\ cifre}{}^2 = 12345678987654321$, atunci $n = 9$. Ridicând la puterea a doua, pentru a obţine cifra maximă 9 este nevoie de nouă linii de câte nouă cifre de 1, deci $n = 9$.

1.298A $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

1.299A Suma pătratelor modulelor rădăcinilor polinomului $f = x^3 + (3i-2)x^2 - (1+4i)x + 2 + i$ ştiind că are o rădăcină reală. Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ rădăcină, $x_0^3 - 2x_0^2 - x_0 + 2 + i(3x_0^2 - 4x_0 + 1) = 0 + i0$ deci $x_0^3 - 2x_0^2 - x_0 + 2 = 0$, $3x_0^2 - 4x_0 + 1 = 0$ rezultă $x_0 = 1$. Împărţim pe f la $x - 1$ sau descompunem în factori: $x^3 - x^2 - (x^2 - 1) + 3i(x^2 - x) - ix + i - x + 1 = 0$, $(x-1)[x^2 + x(3i-1) - (2+i)] = 0$, $x_0 = 1$, $x_{1,2} = \frac{1-3i+\sqrt{-2i}}{2}$, $u_{1,2} = \sqrt{-i} = \cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$, $k = 0, 1 \Rightarrow u_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -i$, $x_3 = 1 - 2i$, $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = 1 + 1 + 5 = 7$.

1.300A Valoarea expresiei $E = \frac{x_2+x_3}{x_1} + \frac{x_1+x_3}{x_2} + \frac{x_1+x_2}{x_3}$ unde x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$ este $E = -6$. $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. $E = \frac{6-x_1}{x_1} + \frac{6-x_2}{x_2} = \frac{6-x_3}{x_3} = 6\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) - 3 = 6\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3} - 3$.

1.301A Toate polinoamele neidentic nule cu coeficienţi reali care verifică relaţia $P(x^3) = x^4 P(x)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ sunt de gradul doi. Avem condiţia $3n = n + 4$, deci $n = 2$.

1.302A Suma S a soluţiilor reale ale ecuaţiei $z^6 - (1-i)z^3 - i = 0$ este $S = 1$. Ecuaţia $t^2 - (1-i)t - 1 = 0$ $(t = z^3)$ are soluţiile $t_1 = 1$, $t_2 = -i$ deci obţinem ecuaţiile $z^3 - 1 = 0$, $z^3 + i = 0$ cu soluţiile reale $z_1 = 1$ (de la prima) şi nici o rădăcină reală de la a doua, $z_k = \cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$, deci $S = 1$ (dacă ar fi $S = 0$ ar trebui ca $x_1 = -1$ să fie rădăcină pentru $z^3 + i = 0$).

1.303A Fie $E = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$. Determinaţi E şi parametrii reali a şi b astfel încât E să fie o soluţie a ecuaţiei $x^3 + ax + b = 0$. $E = 2$ se verifică (observăm şi că $10 - 6\sqrt{3} = \frac{-8}{10+6\sqrt{3}}$) iar a şi b se determină uşor

$E^3 = 10 + 6\sqrt{3} + 10 - 6\sqrt{3} + \sqrt[3]{-8} \cdot 3 \cdot E$.
din formula Cardan sau

1.304A Dacă $x_1 = 1+i$ este rădăcină a polinomului $x^4+3x^3+2x^2+mx+n$ cu $m, n \in \mathbf{R}$, atunci $m = -10$, $n = 20$. Înlocuim $1+i$ în polinom, $(1+i)^2 = 2i$, $(1+i)^3 = -2+2i$, $(1+i)^4 = -4 \Rightarrow m+n = 10$, $m+10 = 0$, $m = -10$, $n = 20$. Altfel, împărţim polinomul la x^2-2x+2 şi $r(x) = 0$.

1.305B Fie $M = \{x \in \mathbf{R} | (\sqrt{3}+1)^x + (\sqrt{3}-1)^x \le 4(\sqrt{2})^x\}$. Ecuaţia se scrie $(\sqrt{3}+1)^x + \frac{2^x}{(\sqrt{3}+1)^x} \le 4(\sqrt{2})^x$, $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^x \le 4$, $t + \frac{1}{t} \le 4$, $t > 0$, $t^2 - 4t + 1 \le 0$, $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3} \le t < 2 + \sqrt{3}$, $(2+\sqrt{3})^{-1} \le \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^x \le 2+\sqrt{3}$. Dar $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ deci $(2+\sqrt{3})^{-1} \le (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x \le 2+\sqrt{3}$, $(2+\sqrt{3})^{-2} \le (2+\sqrt{3})^x \le (2+\sqrt{3})^2 \Rightarrow -2 \le x \le 2$.

1.306B Fie ecuaţia $x^3 + 3x^2 + cx + d = 0$ cu proprietatea că x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuaţiei sunt în progresie aritmetică iar x_1+1, x_2+1, x_3+1 în progresie geometrică. Se cer numărul k al perechilor $(c,d) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$. Avem $x_1+x_2+x_3 = -3$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = c$, $x_1x_2x_3 = -d$, $2x_2 = x_1+x_3$, $3x_2 = x_1+x_2+x_3 = -3$, $x_2 = -1$, $(x_2+1)^2 = (x_1+1)(x_3+1)$ de unde $(x_1+1)(x_3+1) = 0$ deci $x_1 = -1$ sau $x_3 = -1$, luăm $x_1 = -1$, $x_3 = -d$, $-2x_3 = c-1$, $2d-c = -1$, $-c+d = -2$, $c = 3$, $d = 1$, $k = 1$.

1.307B Se cere $\lambda = q(1)$ unde $q(x)$ este câtul împărţirii lui $f = ax^{n+2} + bx^n + 2$ la $(x-1)^2$, dacă $(x-1)^2$ divide pe f. Condiţia se scrie $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$ deci $a+b+2 = 0$, $(n+2)a + b_n = 0$, $2a = 2n$, $a = n$, $b = -n-2$. Apoi $f''(1) = 2q(1) = 2n(n+2)$. Se poate aplica schema lui Horner şi se obţine $\lambda = n(n+2)$.

	n	n	-2	-2	$\dots$	-2	-2
1	n	$2n$	$2n-2$	$2n-4$	$\dots$	$2n-2(n-1)$	$2n-2n$

Dăm şi o variantă prin calcul direct: $f = nx^{n+2} - (n+2)x^n + 2 = (x-1)^2 q(x) = nx^n(x^2-1) - 2(x^n-1) = (x-1)[nx^n(x+1) - 2(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1] = (x-1)[nx^{x+1} - (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1) + nx^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1)] = (x-1)\{(x^{n+1} - x^{n-1}) + (x^{n+1} - x^{n-2}) + (x^{n+1} - x^{n-3}) + \dots + (x^{n+1} - x^2) + (x^{n+1} - x) + (x^{n+1} - 1)] + [(x^n - x^{n-1}) + (x^n - x^{n-2}) + (x^n - x^{n-3}) + \dots + (x^n - x^2) + (x^n - x) + (x^n - 1]\} = (x-1)^2\{[x^{n-1}(x+1) + x^{n-2}(x^2+x+1) + x^{n-3}(x^3+x^2+x+1) + \dots + x^2(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x^2 + x + 1) + x(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1) + (x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x + 1)] + [x^{n-1} + x^{n-2}(x+1) + x^{n-3}(x^2+x+1) \dots x^2(x^{n-3} + x^{n-2} + \dots + x + 1) + x(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1) + (x^{n-1} + \dots x + 1)]\}$. Rezultă că $q(1) = [2+3+4+\dots+n+(n-1)] + [1+2+3+\dots+n] = n(n+1) + n = n(n+2)$.

1.308B Dacă $z_1, z_2 \in \mathbf{C}_1$, $z_1 \ne z_2$, $|z_1| = |z_2| = 1$ şi $w = \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 \bar{z}_2}\right|$ atunci $w = 1$.

$$w = \left|\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1 - \cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{1 - (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}\right| =$$

$$= \left|\frac{-2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2} + i2\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{1 - \cos(\theta_1-\theta_2) - i\sin(\theta_1-\theta_2)}\right| =$$

$$= \left|\frac{2i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{2\sin^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2} - i2\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2} + i\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right| = |\cos\theta_2 + i\sin\theta_2| = 1$$

1.309B Fie $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x) = C_{3x+7}^{6x+2}$, unde D este domeniul maxim de definiţie şi $M = \max f(x)$. Atunci $M = 84$ Condiţiile sunt $3x+7 \ge 6x+2 \Rightarrow x \le \frac{5}{3}$, $3x+7 \ge 0$, $x \ge -\frac{7}{3}$, $6x+2 \ge 0$, $x > -\frac{1}{3}$ deci $-\frac{1}{3} \le x \le \frac{5}{3}$: $x = -\frac{1}{3} \Rightarrow C_6^0 = 1$, $x = 0 \Rightarrow C_7^2 = 21$, $x = \frac{1}{3} \Rightarrow C_8^4 = 70$, $x = \frac{2}{3} \Rightarrow C_9^0 = 84$, $x = \frac{3}{5} \Rightarrow C_{10}^8 = 45$, $x = \frac{4}{3} \Rightarrow C_{11}^{10} = 11$, $x = \frac{5}{3} \Rightarrow C_{12}^{12} = 1$, deci $M = 84$.

1.310B Valoarea sumei $S = C_{16}^0 - C_{16}^2 + C_{16}^2 - C_{16}^6 + \dots - C_{16}^{14} + C_{16}^{16}$. $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}) = C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + C_n^4 + iC_n^5 - C_n^6 - iC_n^7 + C_n^8 + \dots \Rightarrow C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_b^8 + \dots = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$ de unde $S = 2^8\cos 4\pi = 2^8 = 256$.

1.311B Valoarea lui λ din relaţia $x^2+y^2+z^2 = \lambda ab$ unde $x = a+b$, $y = a\varepsilon + b\varepsilon^2$, $z = a\varepsilon^2 + b\varepsilon$, $a, b \in \mathbf{R}$, $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ este $\lambda = x^2+y^2+z^2 = (a+b)^2 + (a\varepsilon + b\varepsilon^2)^2 + (a\varepsilon^2 + b\varepsilon)^2 = a^2(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4) + b^2(1+\varepsilon^4+\varepsilon^2) + 2ab(1+\varepsilon^3+\varepsilon^3) = \lambda ab \Rightarrow \lambda = 6$ deoarece $\varepsilon^3 = 1$, $1+\varepsilon^2+\varepsilon^4 = 1+\varepsilon+\varepsilon^2 = 0$.

1.312B Dacă $a_n = \frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $M = \left\{n \in \mathbf{N}^*, a_n < \frac{28}{15}\right\}$ şi p numărul elementelor lui M, atunci $p = 7$: $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{(4k^2-1)+1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4}\left[n + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)\right] = \frac{1}{4}\left(n + \frac{n}{2n+1}\right) = \frac{n^2+n}{2n+1} \le \frac{56}{15}$ deci $n \le 7$, $p = 7$.

1.313B Valoarea lui a pentru care $f = (x+1)^{302} + x + a$ se divide la $g = x^2 + 3x + 3$ este $a = 2$. g divide pe f dacă rădăcinile lui g sunt şi ale lui f. $x^2 + 3x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{2}$. Luăm $x_1 = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$, $x_1 + 1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, $(x_1+1)^{302} = \cos\frac{302\cdot 2\pi}{3} + i\sin\frac{302\cdot 2\pi}{3} = \cos\frac{3\cdot 100+2}{3}2\pi + i\sin\frac{3\cdot 100+2}{3}2\pi = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} + \frac{-3+i\sqrt{3}}{2} + a = -2 + a = 0$ deci $a = 2$.

unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt soluţiile ecuaţiei
1.314B Suma $S = x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4$ $x^4-2x^3+3x+2=0$, este $S=-16$. Avem $S_1 = x_1+x_2+x_3+x_4 = 2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4 = 0$, $S_2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 4$, $S_k = x_1^k+x_2^k+x_3^k+x_4^k$, $k=1,2,3,4$. Avem $x_i^3-2x_i^2+3+\frac{2}{x_i}=0$, $i=1,2,3,4$, $S_{-1} = \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4} = \frac{x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4}$. $S_3-2S_2+12+2S_{-1} = 0 \Rightarrow S_3 = -1$, $S_4-2S_3+3S_1+8=0 \Rightarrow S_4 = -16$.

1.315B Dacă M este mulţimea acelor a pentru care polinomul $Q = x^2+x+1$ divide pe $P = x^{2n+1}-x^n+ax^{n-1}+x+1$ şi $\lambda = \sum_{a\in M} a$, se cere λ. Notăm $x_0 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, $x_0^3=1$, $x_0^2+x_0+1=0$, $P(x_0)=0$?; $P(x_0) = \cos\frac{2\pi(2n+1)}{2}+i\sin\frac{2\pi(2n+1)}{3}-\cos\frac{2\pi n}{3}-i\sin\frac{2\pi n}{3}+a(\cos\frac{2\pi(n-1)}{3}+i\sin\frac{2\pi(n-1)}{3}+x_0+1)$; luăm $n=3p$, $3p+1$, $3p+2$ şi obţinem spre exemplu $\frac{2\pi(2\cdot 3p+1)}{3} = 4\pi p+\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi n}{3} = 2\pi p$, $\frac{2\pi(n-1)}{3} = 2\pi p-\frac{2\pi}{3}$ etc.

1.316B Valoarea lui a pentru care ecuaţia $\begin{vmatrix} 2-a & a-x & x-1 \\ 1-x^2 & x^2 & -1 \\ 2-a-2x & x+a & x-2 \end{vmatrix} = 0$ admite o soluţie dublă întreagă este $a=0$. Adunăm toate coloanele la prima şi obţinem coloana $1,0,0$ deci determinantul este $\Delta = \begin{vmatrix} x^2 & -1 \\ x+a & x-2 \end{vmatrix} = x^3-2x^2+x+a = f(x) = 0$ şi $f'(x) = 3x^2-4x+1=0$, cu rădăcina întreagă $x=1$, deci $a=0$.

1.317B Fie $A = C_{10}^1+2C_{10}^2+3C_{10}^3+\ldots+10C_{10}^{10}$, atunci $A \in (5000,5200)$. Folosim formula $C_n^k = \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$, de unde $A = 10(C_9^0+C_9^1+C_9^2+\ldots+C_9^9) = 10\cdot 2^9 = 5040 \in (5000,5200)$.

1.318B Fie $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = C_{8x}^{x^2+12}$ unde D este domeniul maxim de definiţie şi $A = \max_{x\in D} f(x)$. Atunci $A = 35960 \in (35000,36000)$. Avem $x>0$, $8x > x^2+12$ deci $x\in[2,6]$; $x=2 \Rightarrow C_{16}^{16}=1$, $x=3 \Rightarrow C_{24}^{21} = C_{24}^3 = \frac{24\cdot 23\cdot 22}{2\cdot 3} = 2024$, $x=4$, $x=5$, $x=6 \Rightarrow A \in (35000,36000)$ obţinem pentru $x=4$, $C_{32}^{28} = C_{32}^4 = 35960$.

1.319B Să se determine valorile lui a pentru care ecuaţia $x^4+2x^3+ax^2+2x+1=0$ are toate soluţiile reale. Ecuaţia este reciprocă, cu schimbarea $x+\frac{1}{x}=t$ se transformă în $t^2+2t+a-2=0$, $\Delta = 3-a>0 \Rightarrow a<3$ avem rădăcinile t_1, t_2 şi $x+\frac{1}{x} = t_1, t_2$, $x^2-t_1x+1=0$, $x^2-t_2x+1=0$. Toate rădăcinile sunt reale dacă pentru ecuaţia $x^2-tx+1=0$, $\Delta = t^2-4\geq 0$ deci $t\leq -2$, $2\leq t$, adică $t_1,t_2\leq -2$ sau $2\leq t_1,t_2$ condiţii cunoscute în algebră $2<t_1=-1+\sqrt{3-1}$, $3<\sqrt{3}-a$. Mai simplu, separăm pe a, $-a = \frac{x^4+2x^3+2x+1}{x^2} = f(x)$, se face graficul lui $f(x)$ şi se intersectează cu dreapta $y=-a$; unde intersectează în patru puncte avem toate rădăcinile reale, condiţia este $a\leq -6$.

1.320B Dacă $|z-1|=2$ şi $|\mathrm{Im} z|\geq 2$ atunci $z=1\pm 2i$: cercul $(x-1)^2+y^2=4$ intersectează dreptele (este tangent) $y=\pm 2$ în punctele $1\pm 2i$.

1.321B Dacă $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ atunci partea reală a numărului $z = \frac{a-b}{1+ab}$ este 0; $a = \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$, $b=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$, $z = \frac{\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{6}+i(\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6})}{1+\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}} = \frac{-2\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}}{2\cos^2\frac{5\pi}{24}+2i\sin\frac{5\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}} = \frac{2i\sin\frac{\pi}{24}(\cos\frac{5\pi}{24}+i\sin\frac{5\pi}{24})}{2\cos\frac{5\pi}{24}(\cos\frac{5\pi}{24}+i\sin\frac{5\pi}{24})} = i\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{24}}{\cos\frac{5\pi}{24}}$.

1.322B Dacă $z=1+i$, atunci $z^{4k+1} = (-4)^k z$; $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$, $z^{4k+1} = (-4)^k\cdot z$.

1.323B $z = i^1\cdot i^3\cdot i^5\cdot\ldots\cdot i^{99} = i^{1+3+5+\ldots 99} = i^{50\cdot 100} = i^{5000} = 1$.

1.324B Dacă $z = \frac{8+6i}{3+4i}$ atunci $|z| = \frac{|8+6i|}{|3+4i|} = \frac{\sqrt{64+36}}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2$.

1.325B Să se determine $f^5 = f\circ f\circ f\circ f\circ f$ dacă $f: \mathbf{C}\to\mathbf{C}$, $f(z) = \frac{m+1}{2}z-\frac{m-1}{2}\bar{z}$: $f(z) = \frac{m+1}{2}(x+iy)-\frac{m-1}{2}(x-iy) = x+imy$ deci $f^5(z) = x+im^5y = \frac{z+\bar{z}}{2}+im^5\frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{m^5+1}{2}z-\frac{m^5-1}{2}\bar{z}$.

1.326B Numărul $(\sqrt{3}-i)^n$ este real pentru $n=6k$ $k\in\mathbf{N}$, $(\sqrt{3}-i)^n = (2\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))^n = 2^n(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6})$ deci $n=6k$, $k\in\mathbf{N}$.

1.327B Ecuaţia $C_{3x+4}^{x^2+2x-4} = C_{10}^6$ are evident soluţia $x=2$ ($3x+4=10$, $x^2+2x-4=6$).

1.328B Coeficientul lui x^3 din dezvoltarea lui $(2x^2+(2+x))^4$ este 104: $(2x^2+(2+x))^4 = (2x^2)^4+4(2x^2)^3(2+x)+6(2x^2)^2(2+x)^2+4(2x^2)(2+x)^3+(2+x)^4$. x^3 apare numai în ultimii doi termeni: $8\cdot 3\cdot 2^2+4\cdot 2 = 104$.

1.329B Suma S a soluţiilor reale ale ecuaţiei $x+x^4+x^7+\ldots+x^{34}=0$ este -1: $x(1+x^3+(x^3)^2+\ldots+(x^3)^{11}) = x\cdot\frac{1-(x^3)^{12}}{1-x^3} = x\cdot\frac{1-(x)^{36}}{1-x^3} = 0$ deci avem $x_1=0$ şi $x_2=-1$ ($x_3=1$ nu este soluţie) deci $S=-1$.

1.330B Ecuaţia $x^4-\alpha x^3+\alpha^2x^2+\alpha x+1=0$ nu are toate soluţiile reale pentru $(\forall)\alpha\in\mathbf{R}$: cu schimbarea $x-\frac{1}{x}=t$ ecuaţia devine $t^2-\alpha t+\alpha^2+2=0$, $\Delta = -3\alpha^2-8<0$ deci nu are soluţii reale pentru orice $\alpha\in\mathbf{R}$.

1.331B Dacă $A_x^7+3A_x^5 = 45A$ atunci $1 = \frac{42}{(x-5)(x-6)}$, de unde $x=12$.

1.332B În dezvoltarea $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{20}$ avem 4 termeni raţionali: $T_{k+1} = C_{20}^k\sqrt{2}^{20-k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^k = C_{20}^k 2^{\frac{20-k}{2}-\frac{k}{3}}$ deci $k=6p$, $p=0,1,2,3 \Rightarrow$ termeni 4.

1.333B În dezvoltarea $(5+n)^n$ al zecelea termen este cel mai mare pentru $n=12$. $T_{k+1} = C_n^k5^{n-k}n^k$, $C_n^95^{n-9}n^9 > C_n^85^{n-8}n^8$, $C_n^95^{n-9}n^9 > C_n^{10}5^{n-10}n^{10}$.

1.334B Coeficientul A al lui x^6 din expresia $[(1+x^{\frac{1}{3}})(1+x^{\frac{1}{4}})]^{15}$: $T_{m+1}T_{p+1} = C_{15}^{m}\cdot C_{15}^{p}x^{\frac{m}{3}+\frac{p}{4}}$, $p=4,8,12$, $m=15,12,9$ deci $A = C_{15}^{15}C_{15}^{4}+C_{15}^{12}C_{15}^{8}+C_{15}^{9}C_{15}^{12}$.

1.335B $s_n = \frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(n-2)(n-1)}-\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

1.336B Fie $A = C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n$. Atunci $A=n2^{n-1}$ (vezi 1.317 B). Folosim formula $C_n^k = \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$, $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, $A = n(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\ldots+C_{n-1}^{n-1}) = n2^{n-1}$.

1.337B Valoarea sumei $S_n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2$, $S_n = n(2n+1)$. $S_n = \sum_{k=1}^{n}[(2k)^2-(2k-1)^2] = \sum_{k=1}^{n}(4k-1) = 4\cdot\sum_{k=1}^{n}k-n = 4\frac{n(n+1)}{2}-n = n(2n+1)$.

1.338B Termenul liber (care nu-l conţine pe x) din dezvoltarea $\left(x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{72}$ este T_{55} : $T_{k+1} = C_{72}^k x^{72-k}(x^{-\frac{1}{3}})^k = C_{72}^k x^{72-\frac{4k}{3}}$, $k = \frac{3\cdot72}{4} = 54$.

1.339B Parametrii reali x, y astfel încât ecuaţia $t^4-2xt^2+y^2=0$ cu necunoscuta t să admită soluţii reale în progresie aritmetică verifică egalitatea $3x=5|y|$. Rădăcinile z_1, z_2, t_3, t_4 le notăm $a-3r$, $a-r$, $a+r$, $a+3r$ (raţia este $2r$) şi avem $t_1+t_2+t_3+t_4 = 4a = 0$ deci $a=0$ şi $t_1t_2t_3t_4 = 9r^4 = y^2$, $r^2 = \frac{|y|}{3}$. Dar $(t^2)_{1,2} = x\pm\sqrt{x^2-y^2}$ de unde rezultă $x>0$, $t^2 = r^2 = x-\sqrt{x^2-y^2} = \frac{|y|}{3} \Rightarrow 3x = 5|y|$.

1.340B Ecuaţia $x^3-3x-\sin\varphi=0$ are trei rădăcini reale distincte deoarece: notând $f(x)=x^3-3x-\sin\varphi$, $f'(x)=3(x^2-1)$, $f'(-1)=0$, $f'(1)=0$ sunt abscise de maxim $f(-1)=2-\sin\varphi>0$ şi de minim $f(1)=-2-\sin\varphi<0$ deci şirul lui Rolle corespunzător ne dă $-$, $+$, $-$, $+$, rezultă trei rădăcini. Algebric, fără derivată, probăm semnul lui f în puncte uşor de calculat, spre exemplu $-\infty$, -1, 1, $+\infty$.

1.341B Soluţia reală a ecuaţiei $x^3-5x-1=0$ este un număr iraţional. Presupunem contrariul şi fie $x_0=\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbf{Z}$, $\frac{p}{q}$ ireductibilă. Avem $p^3 = q^2(q-5p)$ deci p conţine factori ai lui q, absurd rezultă x_0 iraţional.

1.342B Valorile parametrilor reali α,β,γ astfel încât polinomul $f=3x^4-16x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ să aibă rădăcina $2+i$ şi să fie devizibil cu $x-1$ sunt $\alpha=22$, $\beta=-24$, $\gamma=5$. Condiţiile se scriu $f(1)=0\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=13$ împărţim f la $g=[x-(2+i)][x-(2-i)] = x^2-4x+5$ şi obţinem restul

$(4\alpha+\beta-104)x+(\gamma-5\alpha+155)\equiv0$ (câtul este $3x^2-4x+(\alpha-31)$) deci rezultă sistemul $4\alpha+\beta=104$, $5\alpha-\gamma=155$, $\alpha+\beta+\gamma=13$ cu soluţia $\alpha=32$, $\beta=-24$, $\gamma=5$. Mai putem pune condiţia $f(2+i)=0$ şi obţinem două ecuaţii.

1.343B Valorile coeficienţilor $a,b\in\mathbf{R}$ astfel încât ecuaţia $x^4+2x^3+3x^2+ax+b=0$ să admită soluţia $1+i^{\circ}$ sunt $a=-10$, $b=18$. Procedăm ca în 1.342 împărţind $f=x^4+2x^3+3x^2+ax+b$ la $g=[x-(1+i)][x-(1-i)] = x^2-2x+2$ şi facem restul echivalent cu 0 sau înlocuim în f pe $1+i$: $(1+i)^2=2i$, $(1+i)^3=-2+2i$, $(1+i)^4=-4$ şi avem $-4+2(-2+2i)+6i+a+ai+b=0\Rightarrow a+b=8$, $a+10=0$, $a=-10$, $b=18$.

1.344B Ştiind că polinomul $f=ax^4+bx^3+cx^2+(a-1)x-1$ se divide cu $(x-1)^3$ să se calculeze suma $S=a+b+c$. Condiţia se scrie $f(1)=0$, $f'(1)=0$, $f''(1)=0$ şi se obţine sistemul $2a+b+c=2$, $5a+3b+2c=1$, $6a+3b+c=0$ cu soluţia $a=2$, $b=-5$, $c=3$ deci $S=0$. Altfel scriem $f=(x-1)^3(mx+n)$ şi dăm valori lui x, spre exemplu $x=1$, $x=0$, $x=2$, $x=-\frac{n}{m}$ sau identificăm coeficienţii gradelor egale din cei doi membri.

1.345B Numărul n al valorilor complexe distincte pe care le ia funcţia polinomială $P(x)=x^6+2x^5+5x^4+4x^3+6x^2+5x+7$ dacă x este soluţie a ecuaţiei $x^3+x+1=0$ este $n=1$: grupăm termenii lui $P(x)$, $P(x)=(x^6+x^4+x^3)+2(x^5+x^3+x^2)+4(x^4+x^2+x)+(x^3+x+1)+6$, deci $P(x_i)=6$ $(\forall)x_i$, $i=1,2,3$.

1.346B Numărul $m=\frac{1}{1+x_1}\cdot\frac{1}{1+x_2}\cdot\frac{1}{1+x_3}\cdot\frac{1}{1+x_4}\cdot\frac{1}{1+x_5}$ unde x_1,x_2,x_4,x_5 sunt soluţiile ecuaţiei $f(x)=0$ unde $f(x)=2x^5+3x^4+5x^3+3x^2+6x+4$ este $m=\frac{2}{3}$: $f(x)=2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$, $f(-1) = -2(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)(1+x_4)(1+x_5)$ deci $m=\frac{-2}{f(-1)}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$. Se poate folosi Viètte: $\frac{1}{m} = 1+(x_1+x_2+\ldots+x_5)+(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_4x_5)+(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots)+(x_2x_3x_4x_5+x_1x_3x_4x_5+\ldots)+x_1x_2x_3x_4x_5$.

1.347B Valorile lui $m\in\mathbf{R}$ astfel încât numărul complex $z=(1-m)i^3-2(1+m)i^2+3mi+1$ să fie real sunt $m=\frac{1}{4}$; $z=(m-1)i+2(1+m)+3mi+1$, $\operatorname{Im}z=4m-1=0\Rightarrow m=\frac{1}{4}$.

1.348C Dacă $z,z'\in\mathbf{C}$ astfel încât $|z|=|z'|=1$, $zz'+1\neq0$ şi $w=\frac{z+z'}{1+zz'}$, atunci $w=\frac{\cos\theta+i\sin\theta+\cos\theta'+i\sin\theta'}{1+(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')} = \frac{\cos\theta+\cos\theta'+i(\sin\theta+\sin\theta')}{1+\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')} = \frac{2\cos\frac{\theta+\theta'}{2}\cos\frac{\theta-\theta'}{2}+2i\sin\frac{\theta+\theta'}{2}\cos\frac{\theta-\theta'}{2}}{2\cos^2\frac{\theta+\theta'}{2}+2i\sin\frac{\theta+\theta'}{2}\cos\frac{\theta+\theta'}{2}} = \frac{2\cos\frac{\theta-\theta'}{2}(\cos\frac{\theta+\theta'}{2}+i\sin\frac{\theta+\theta'}{2})}{2\cos\frac{\theta+\theta'}{2}(\cos\frac{\theta+\theta'}{2}+i\sin\frac{\theta+\theta'}{2})} = \frac{\cos\frac{\theta-\theta'}{2}}{\cos\frac{\theta+\theta'}{2}}\in\mathbf{R}$.

1.349C Să se determine $z\in\mathbf{C}$, dacă $\bar{z}+|z|\neq0$ şi $w=\frac{z+|z|}{\bar{z}+|z|}$ este real. $w=\frac{\rho(\cos\theta+i\sin\theta)+\rho}{\rho(\cos\theta-i\sin\theta)+\rho} = \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}-2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \cos\theta+i\sin\theta = z\in\mathbf{R}$.

1.350C Suma $S=1+2i+3i^2+\ldots+ni^{n-1}$ este egală cu $\frac{1}{2}[i-(n+1)i^{n+1}-ni^n]$,

$i \cdot S = i + 2i^2 + 3i^3 + \ldots + (n-1)i^{n-1} + ni^n$, $S - iS = (1-i)S = 1 + i +$
$i^2 + \ldots + i^{n-1} - ni^n \Rightarrow S = \frac{1}{1-i}\left[\frac{1-i^n}{1-i} - ni^n\right] = \frac{1}{2}[i - (n+1)i^{n+1} - ni^n]$.
1.351C $S = 1-(1-i)+(1-i)^2-(1-i)^3+(1-i)^4-(1-i)^5 = \frac{1-[-(1-i)]^6}{1+1-i} =$
$2 - 3i$ sau $S = i - 2i + 2 + 2i - 4 + 4 - 4i = 2 - 3i$.
1.352C Pentru $S = \frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}$ folosim formula $C_{n+1}^{k+1} = \frac{n+1}{k+1}C_n^k$,
$\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{(n+1)}C_{n+1}^{k+1} \Rightarrow S = \frac{1}{(n+1)}[C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}) = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$.
1.353C Câte numere de cinci cifre în care nu se repetă nici una dintre cifre se pot forma cu cifrele $0, 2, 3, 5, 6$. Cu 5 cifre se pot forma $5!$ numere dar cele care au prima cifră 0 în număr de $4!$ nu se consideră deci $5! - 4! = 4!4 = 96$.
1.354C Termenul dezvoltării $\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^5$ care nu-l conţine pe x este egal cu 51. $\left[(1+x) + \frac{1}{x}\right]^5 = (1+x)^5 + 5(1+x)^4\frac{1}{x} + 10(1+x)^3\frac{1}{x^2} + 10(1+x)^2\frac{1}{x^3} +$
$5(1+x)\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}$, ultimii trei termeni nu conţin termeni liberi (fără x) iar primii trei ne dau: $1 + 5 \cdot 4 + 10 \cdot 3 = 51$.
1.355C Să se determine $S = C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots$. Fie $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} = C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + C_n^4 + iC_n^5 - C_n^6 - iC_n^7 + C_n^8 + \ldots$ deci
$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$. Dar $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots = 2^{n-1}$ şi adunând rezultă $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$.
1.356C O urnă are 10 bile albe şi 4 bile negre, toate numerotate diferit. În câte moduri diferite se pot extrage trei bile astfel încât cel mult una din bile să fie albă. Avem $10 \cdot C_{40}^2$ cazuri cu o bilă albă şi C_{40}^3 cazuri cu 3 bile negre, deci în total $10 \cdot C_{40}^2 + C_{40}^3 = 17680$ cu cel mult o bilă albă.
1.357C C.m.m.d.c. al tuturor numerelor $7^{4n+1} - 7$ $(\forall)n \in \mathbf{N}$ este $7^5 - 7$:
$7[(7^4)^n - 1] = 7 \cdot (7^4 - 1)\,((7^4)^{n-1} + (7^4)^{n-2} + \ldots + 7^4 + 1))$. Altfel, prin inducţie: $P(n)$ înseamnă $7^{4n+1} - 7 = (7^5 - 7)p$ iar $P(m+1)$, $7^{4n+5} - 7 =$
$7^4[(7^5 - 7)p + 7] - 7 = (7^5 - 7)(7^4p + 1)$.
1.358C Suma S a coeficienţilor polinomului $(\sqrt{2}x - \sqrt{3})^{10}$ este $S = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{10}$. Se dezvoltă polinomul şi se face $x = 1$.
1.359C $S_n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$ se obţine dezvoltând $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(x+1)^n = (C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n) \cdot (C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + C_n^2x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1}x + C_n^n)$ şi egalând coeficientul lui x^n din membrul stâng C_{2n}^n cu coeficientul lui x^n din membrul drept $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^{n-1})^2 + (C_n^n)^2$ obţinut operând pe verticală, $(C_n^kx^{n-k})(C_n^kx^k) = (C_n^k)^2x^n$.
1.360C În dezvoltarea $(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5})^{200}$ numărul n al termenilor raţionali este $n = 51$. $T_{k+1} = C_{200}^k 3^{\frac{200-k}{2}} \cdot 5^{\frac{k}{4}}$ deci $k = 4p$, $p = 0, 1, 2, \ldots, 50$ de unde $n = 51$.

1.361C Mulţimea valorilor parametrului $a \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ pentru care ecuaţia $(a-2)x^4 - 2(a+1)x^3 - ax^2 + 2(a+1)x + (a-2) = 0$ are toate rădăcinile reale este $a \geq \frac{7}{8}$, $a \neq 2$. Procedăm ca în 1.361B sau 1.269A făcând schimbarea $x - \frac{1}{x} = t$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$ (ecuaţia este reciprocă), sau separăm parametrul a, $\frac{a}{2} = \frac{x^4 + x^3 - x + 1}{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1} = f(x)$, facem graficul funcţiei $y = f(x)$ şi intersectăm cu $y = \frac{a}{2}$. Obţinem $a \geq \frac{7}{8}$, $a \neq 2$.
1.362C O condiţie necesară şi suficientă ca rădăcinile polinomului $f = x^3 + ax^2 + bx + 2$, $(a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0)$ să fie în progresie geometrică este $b = a\sqrt[3]{2}$. Rădăcinile vor fi $x_1 = \frac{\alpha}{q}$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \alpha q$, Viette ne dă $x_1x_2x_3 = \alpha^3 = -2$ deci $\alpha = -\sqrt[3]{2}$ şi înlocuim în ecuaţie $-2 + a(\sqrt[3]{2})^2 - b\sqrt[3]{2} + 2 = 0$ deci $b = \sqrt[3]{2}a$.
1.363C Polinomul $x^4 + x^2 + 1$ este reductibil peste $\mathbf{R}$: $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$ deci reductibil şi peste Q.
1.364C Câte polinoame $P(x)$ de gradul 3 cu coeficienţi întregi satisfac condiţiile $P(7) = 5$, $P(15) = 9$. Fie $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$; $a \cdot 7^3 + b \cdot 7^2 + c \cdot 7 + d = 5$, $a \cdot 15^3 + b \cdot 15^2 + c \cdot 15 + d = 9$, $P(15) - P(7) = 8m = 4$, $2m = 1$, $m \in \mathbf{Z}$ imposibil deci nici un polinom.
1.365C Rezolvaţi ecuaţia $f(x) = 6x^4 + x^3 + 52x^2 + 9x - 18 = 0$ ştiind că admite soluţia $x_1 = 3i$. Deci admite şi soluţia $x_2 = \bar{x}_1 = -3i$ şi atunci $f(x)$ se divide prin polinomul $g(x) = x^2 + 9$. Împărţim f la g sau descompunem în factori: $6x^2(x^2+9) + x(x^2+9) - 2(x^2+9) = 0$, $(x^2+9)(6x^2+x-2) = 0$, $x_1 = 3i$, $x_2 = -3i$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -\frac{2}{3}$.
1.366C Dacă soluţiile ecuaţiei $z^3 - (4+i)z^2 + mz - 7i + 4 = 0$, $m \in \mathbf{C}$ sunt $z_1 = i$, $z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ cât este $a = m + z_2 + z_3^2$? Înlocuim i în ecuaţie şi obţinem $m = 7 + 8i$, descompunem în factori (sau împărţim prin $z - i$) şi rezultă $(z-i)(z^2 - 4z + 7 + 4i) = 0$ cu rădăcinile $z_2 = 1 + 2i$, $z_3 = 3 - 2i$ sau $z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = 1 + 2i$, deci a poate lua două valori, $a \in \{13 - 2i, 7 + 10i\}$.
1.367C Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ sunt soluţii complexe ale ecuaţiei $x^{100} + x^{99} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0$ şi $S = \sum_{k=1}^{100} x_k^{103}$, atunci $S = -1$. Ecuaţia se scrie $\frac{x^{101}-1}{x-1} = 0$, $x \neq 1$ deci $x_k = \sqrt[101]{1} = \cos\frac{2k\pi}{101} + i\sin\frac{2k\pi}{100}$, $k = 1, 2, \ldots, 100$ $(k = 0$, $x_0 = 1$ nu o luăm$)$. Dar $x_k^{101} = 1$, $x_k^{103} = x_k^2$, deci $S = \sum_{k=1}^{100} x_k^2 =$

$$\left(\sum_{k=1}^{100} x_k\right)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{99}x_{100}) = 1 - 2 = -1.$$

1.4 Matrice. Determinanţi. Sisteme liniare

1.368A Mulţimea M, a tuturor valorilor lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$ este inversabilă, oricare ar fi x, este $M = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$: $\det A = (1-m)x^2 + 2x + 3 - m$, $\Delta = -2m^2 + 5m - 2$. A este inversabilă dacă $\det A \neq 0$ deci dacă $\Delta = 0$ nu are rădăcini reale, rezultă $\Delta < 0$ prin urmare $m \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$ unde $m_1 = \frac{1}{2}$ şi $m_2 = 2$ sunt rădăcinile ecuaţiei $\Delta = 0$, $2m^2 - 5m + 2 = 0$.

1.369A Dacă M este mulţimea acelor $m \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + mz = 1 \\ x - y + m^2 z = m \\ 2x + (m+1)z = m^2 \end{cases}$$

este incompatibil, iar $S = \sum_{m \in M} m$, atunci $S = \frac{1}{2}$. Dacă determinantul Δ al sistemului este 0 iar determinantul caracteristic Δ^* diferit de 0 atunci sistemul este incompatibil (rangul matricei sistemului este diferit de rangul matricei extinse): $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ 1 & -1 & m^2 \\ 2 & 0 & m+1 \end{vmatrix}$, $\Delta^* = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ 1 & 0 & m^2 \end{vmatrix}$, $\Delta = 2m^2 - m - 3 = 0$ pentru $m_1 = -1$, $m_2 = \frac{3}{2}$, $\Delta^* = -3m^2 + 2m + 2$ nu se anulează pentru $m = -1$ şi $m = \frac{3}{2}$ deci sistemul este incompatibil pentru $m = -1$, $m = \frac{3}{2}$ iar $S = \frac{1}{2}$.

1.370A Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ atunci matricea X soluţie a ecuaţiei matriceale $AXB = C$ are suma elementelor $S = -15$: $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$ unde $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$,

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}.$$

1.371A Dacă $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ şi $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1 \end{pmatrix}$, calculaţi $S = A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$. ε este rădăcină cubică a unităţii, $x^3 - 1 = 0$, $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ iar

$A^2 = 2A$, $A^3 = 2^2 A$, $A^4 = 2^3 A, \ldots, A^{n-1} = 2^{n-2} A$ deci $S = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-2})A = \frac{2^{n-1}-1}{2-1} A = (2^{n-1} - 1)A$.

1.372A Matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ satisface egalitatea $A^3 = mA^2 + nA$ pentru $m = 5$, $n = -4$: $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 \\ 32 & 0 & 32 \end{pmatrix}$ deci $8m + 2n = 32$, $m + n = 1$, $m = 5$, $n = -4$.

1.373A Matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$ are rangul doi pentru $a = 0$ şi $b = -1$; calculăm determinanţii de ordinul trei, îi anulăm şi găsim condiţia $a = 0$, $b = -1$ sau aplicăm procedeul Gauss.

1.374A Matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ x & -1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice $x \in \mathbf{R}$ dacă determinantul $D = \det A = -x^2 + (m+1)x - (2m+1)$ are rădăcini imaginare, deci $\Delta = m^2 - 6m - 3 < 0 \Rightarrow m \in (3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3})$.

1.375A Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, determinaţi a şi b astfel încât $AB = BA$: $AB = \begin{pmatrix} a & b+4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = BA \Rightarrow a = 2$, $b \in \mathbf{R}$.

1.376A Ecuaţia matriceală $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ are soluţia $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+z & 3y+t \\ x+3z & y+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x+y \\ z+t & z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\Delta \neq 0 \Rightarrow x = y = z = t = 0$.

1.377A Matricele de forma $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ pentru care $A^2 - 3A = -2I$ sunt $A = I$, $A = 2I$: $\begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $x^2 - y^2 - 3x = -2$, $2xy - 3y = 0$, $y(2x - 3) = 0 \Rightarrow y = 0$ şi $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

sau $x=\frac{3}{2}$ şi $y^2=-\frac{1}{4}$ deci $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

1.378A Soluţiile ecuaţiei $\begin{vmatrix}x&1&1\\1&x&1\\m^2&-m&x\end{vmatrix}=0$ sunt $x\in\{-1,-m,m-1\}$.
$x^3+x(-m^2+m-1)+m^2-m=0\Rightarrow(x-1)(x^2+x-m^2+m)=0$, $x_1=1$,
$x_{2,3}=\frac{-1\pm|2m-1|}{2}=\begin{cases}-m\\m-1\end{cases}$.

1.379A Valoarea determinantului $\Delta=\begin{vmatrix}\frac{1}{x_1}&\frac{1}{x_2}&\frac{1}{x_3}\\x_3&x_1&x_2\\\frac{1}{x_2}&\frac{1}{x_3}&\frac{1}{x_1}\end{vmatrix}$ unde x_1,x_2,x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3-3x^2+x+1=0$ este $\Delta=6$. Ecuaţia se scrie $(x-1)(x^2-2x-1)=0$ cu rădăcinile $x_1=1$, $x_{2,3}=-1\pm\sqrt{2}$. Altfel: $\Delta=\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{x_1x_2x_3}=\frac{1-(3^2-2)}{-1}=6$.

1.380A Dacă $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-2&-3\\1&2&3\end{pmatrix}$ şi $f(x)=2x^3+3x$, atunci $\det f(A)$ cu $f(A)=2A^3+3A$ este 140. Rezultă că $A^2,A^3,f(A)$ sunt succesiv

$$2\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&-1&-1\\3&1&2\end{pmatrix},\quad 2^3\begin{pmatrix}2&1&2\\-2&0&-1\\3&1&3\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}19&8&19\\-13&-6&-17\\27&14&33\end{pmatrix},$$

deci $\det f(A)=140$.

1.381A Fie $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7&5&11\\5&1&7\\10&8&15\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x&y&z\\z&x&y\\y&z&x\end{pmatrix}$ şi $AXA=B$. Atunci $(x,y,z)=(1,2,3)$: cu Gauss în două etape se calculează inversa A^{-1} a matricei A $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\1&0&2&0&0&1\end{array}\right)$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right),\ A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

deci

$$X=A^{-1}BA^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&5&11\\5&1&7\\10&8&15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}4&2&7\\5&1&7\\3&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}$$

1.382A Valorile parametrilor reali a,b,c astfel încât sistemul $2x-3y+4z-5t=1$, $x+9y+az+t=-3$, $5x-6y+10z-bt=c$ să fie compatibili. Fie determinaţii

$$\Delta_a=\begin{vmatrix}2&-3&4\\1&9&a\\5&-6&10\end{vmatrix},\quad\Delta_b=\begin{vmatrix}2&-3&-5\\1&9&1\\5&-6&b\end{vmatrix},\Delta_c=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&9&-3\\5&-6&c\end{vmatrix}.$$

$\Delta_a=-3a+6$, $\Delta_b=-21b+252$, $\Delta_c=21c-42$. Dacă $\Delta_a\neq0$ deci $a\neq2$ şi $b,c\in\mathbf{R}$ sau $\Delta_b\neq0$ deci $b\neq12$, $a,c\in\mathbf{R}$ sistemul este compatibil determinat (soluţie unică): dacă $a=2$, $b=12$ ($\Delta_a=\Delta_b=0$) şi $\Delta_c\neq0$ deci $c\neq2$ sistemul este incompatibil iar dacă $a=2$, $b=12$, $c=2$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat (rangul matricei extinse este egal cu rangul matricei).

1.383A Numărul de soluţii reale ale sistemului $2x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+2y^2+z^2=4$, $x^2+y^2+2z^2=6$ este 8: adunăm toate ecuaţiile $x^2+y^2+z^2=\frac{7}{2}\Rightarrow x^2=y^2=\frac{1}{2}$, $z^2=\frac{5}{2}$, $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, deci opt soluţii.

1.384A Numărul n de soluţii reale ale sistemului $2xy+yz+xz=1$, $xy+2yz+zx=2$, $xy+yz+2xz=3$ este $n=0$. Adunăm toate ecuaţiile $xy+yz+xz=\frac{3}{2}\Rightarrow xy=-\frac{1}{2}$, $yz=\frac{1}{2}$, $zx=\frac{3}{2}\Rightarrow(xyz)^2=-\frac{3}{8}$, deci $n=0$.

1.385A Sistemul $ax+by+cz=a$, $cx+ay+bz=b$, $bx+cy+az=c$, $a,b,c\in\mathbf{R}$ distincte are soluţie unică dacă şi numai dacă $a+b+c\neq0$: determinantul sistemului

$$\Delta=\begin{vmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&0&0\\c&a-c&b-c\\b&c-b&a-b\end{vmatrix}=$$
$$=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]\neq0\Leftrightarrow a+b+c\neq0,$$

se aplică Cramer.

1.386A Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 14587 & 14597 \\ 29243 & 29253 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14587 & 10 \\ 29243 & 10 \end{vmatrix} = 10(1458$ $29243) = -146560$.

1.387A Determinaţi $x, y \in \mathbf{R}$ astfel ca $\Delta = \begin{vmatrix} x+y & xy & 0 \\ 1 & x+y & xy \\ 0 & 1 & x+y \end{vmatrix} = 0$: $\Delta = (x+y)^3 - 2xy(x+y) = (x+y)(x^2+y^2)$ deci condiţia este $x+y=0$.

1.388A Valoarea determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 \end{vmatrix}$ unde x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - 6x + 5 = 0$ este $\Delta = -11$: $x_1+x_2+x_3 = 0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = -6$, $x_1x_2x_3 = -5$, $\Delta = (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+x_1x_2x_3 = -11$.

1.389A Ecuaţia $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$ are soluţiile $x \in \left\{1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$: $\Delta = x^3 - 2x^2 + 1 = 0$, $(x-1)(x^2-x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_{2,3} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

1.390A Dacă matricea pătrată A are proprietatea $A^3 = 0$ atunci $(I-A)^{-1} = I + A + A^2$: se verifică uşor că $B = I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots$ este inversa matricei $I - A$; $(I-A)(I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n + \ldots) = (I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots) - (A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n + A^{n+1} + \ldots) = I$ deci $(I-A)^{-1} = I + A + A^2$.

1.391A Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ este $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

$\det A = -1$, matricea complemenţilor algebrici înmulţită cu $\frac{1}{\det A}$ (deci cu semn schimbat) este

$$A' = -\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

iar transpusa $(A')^t = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

1.392A oricare ar fi matricele pătrate A, B avem $(A+B)^3 = (A+B)(A^2 + AB + BA + B^2) = A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3$.

1.393A Dacă $f, g, h, k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt derivabile şi $\Delta(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ h(x) & k(x) \end{vmatrix}$ atunci derivata $\Delta'(x)$ a lui $\Delta(x)$ este $\Delta'(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) \\ h(x) & k(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ h'(x) & k'(x) \end{vmatrix}$; $\Delta'(x) = (f(x)k(x) - g(x) \cdot h(x))' = [f'(x)k(x) - g'(x)h(x)] + [f(x)k'(x) - g(x)h'(x)]$.

1.394A Matricele de tipul $A_x = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix}$ verifică evident relaţia $A_x + A_y = A_{x+y}$ $\left(A_x + A_y = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & -y \\ -y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & -(x+y) \\ -(x+y) & x+y \end{pmatrix} = A_{x+y}\right)$ dar nu verifică relaţia $A_x^2 = xA_x$, $x \neq 0$ $\left(A_x^2 = x^2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = 2xA_x\right)$.

1.395A Fie $M \in M_n(\mathbf{R})$ cu elementele $a_{ij} = \max\{i, j\}$, $i, j = \overline{1, n}$ şi $\Delta = \det M$. Atunci $\Delta = (-1)^{n+1}n$. Pentru simplitate luăm $n = 5$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{5+1} \cdot 5.$$

1.396A Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$, valorile lui x şi y astfel încât $AB = BA$ sunt $x = 0, y = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+y & 1+x \\ 2(1+y) & 2(1+x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2x & 1+2x \\ y+2 & y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $1+y = 1+2x$, $1+x = 1+2x$, $2(1+y) = y+2$, $2(1+x) = y+2 \Rightarrow y = 2x$, $x = 0$, $y = 0$.

1.397A Determinantul

$$\Delta_{x,y} = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} =$$

$$= 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & x-y \\ x+y & -y & -x \end{vmatrix} = -2(x+y)(x^2-xy+y^2) = -2(x^3+y^3).$$

1.398A Numărul soluţiilor (reale !) ale ecuaţiei $\begin{vmatrix} x^3 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 \\ x & 1 & m \end{vmatrix} = 0$ care sunt independente de m este $n = 1$. Ecuaţia $-m(x^3+1)+(-x^3+x^2+2x) \equiv 0$ in m deci $x^3+1=0$, $x^3-x^2-2x=0 \Rightarrow x=-1$, rezultă $n=1$.

1.399A Fie sistemul (S) $\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j = a^{i-1}, i=\overline{1,4}, a \in \mathbf{R}^*, a_{ij} = \begin{cases} a, & i=j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$, $i,j=\overline{1,4}$ şi $A = \{a \in \mathbf{R}^* | (S)$ este compatibil nedeterminat$\}$ atunci $A=\{1\}$. Sistemul, determinantul sistemului Δ şi determinantul caracteristic Δ_c pentru valoarea $a=3$ se scriu succesiv:

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+ax_2+x_3+x_4=a \\ x_1+_2+ax_3+x_4=a^2 \\ x_1+x_2+x_3+ax_4=a^3 \end{cases} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 27 \end{vmatrix},$$

$$\Delta = (a+3)(a-1)^3, \quad \Delta_x = -320 \neq 0.$$

Deoarece pentru $a=-3$ determinantul caracteristic $\Delta_c \neq 0$ sistemul este incompatibil, iar pentru $a=1$ toţi minorii caracteristici sunt $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ sistemul este compatibil nedeterminat (triplu nedeterminat, soluţia depinde de trei parametri).

1.400A Soluţia inecuaţiei $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} \geq 0$ este $\{-1\} \cup [\frac{1}{2}, \infty)$. Inecuaţia se scrie $(x+1)^2(2x-1) \geq 0 \Rightarrow x=-1, x \geq \frac{1}{2}$.

1.401A Suma S a soluţiilor (reale) distincte ale ecuaţiei $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x^2 & x^3 \\ x^2 & x^4 & x^6 \end{vmatrix} = 0$ este $S=0$. Determinantul este Vandermonde $\Delta = (x^2-x)(x^3-x)(x^3-x^2) = x^4(x-1)^3(x+1) = 0 \Rightarrow x_1=0, x_2=1, x_3=-1, S=0$.

1.402A Dacă $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$, $x,y \in \mathbf{R}$ şi $M = 2xX - X^2$, atunci $M = x^2 I_2$:
$X^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} = x^2 I_2$.

1.403A Dacă $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 1$, $z^3=1$ şi $D = \begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z & z+1 \end{vmatrix}$, atunci $D = z$,
$D = z^2(z^2+z+1)+z = z$ deoarece $z^2+z+1=0$.

1.404A Valoarea determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & a & a & a & a \\ a & x & a & a & a \\ a & a & x & a & a \\ a & a & a & x & a \\ a & a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+4a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & a & a & a \\ a & a & x & a & a \\ a & a & a & x & a \\ a & a & a & a & x \end{vmatrix} =$$

$$= (x+4a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & x-a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & x-a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & x-a & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x+4a)(x-a)^4.$$

1.405A Dacă w este o soluţie a ecuaţiei $x^2+x+1=0$ atunci suma $S = \sum_{k=1}^{3p} \begin{pmatrix} w^k & w^{2k} & w^{3k} \\ w^{3k} & w^k & w^{2k} \end{pmatrix}$ are valoarea $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3p \\ 3p & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$S = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3p} w^k & \sum_{k=1}^{3p} w^{2k} & \sum_{k=1}^{3p} w^{3k} \\ \sum_{k=1}^{3p} w^{3k} & \sum_{k=1}^{3p} w^k & \sum_{k=1}^{3p} w^{2k} \end{pmatrix}, \quad \sum_{k=1}^{3p} w^{3p} = 3p$$

$$\sum_{k=1}^{3p} w^k = (w+w^2+w^3)+(w^4+w^5+w^6)+\ldots+(w^{3p-2}+w^{3p-1}+w^{3p}) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{3p} w^{2k} = (w^2+w^4+w^6)+(w^8+w^{10}+w^{12})+\ldots+(w^{2(3p-2)}+w^{2(3p-1)}+w^{2\cdot 3p}) = 0$$

deci $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3p \\ 3p & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Altfel: $\sum_{k=1}^{3p} w^k = w\frac{1-w^{3p}}{1-w}$, $\sum_{k=1}^{3p} w^{2k} = w^2\frac{1-w^{2(3p)}}{1-w^2}$

1.406A Pentru câte valori ale lui $m \in \mathbf{R}$ sistemul $\begin{cases} x-my+z=2 \\ x+y-mz=2 \\ 2x-y+3z=4 \end{cases}$ este compatibil simplu nedeterminat ? Determinantul sistemului $\Delta = 2m(m+1)$

şi cei doi determinaţi caracteristici obţinuţi pentru valorile $m = 0$ şi $m = -1$ sunt

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$\Delta = 2m(m+1)$, deci pentru $m \neq 0$ şi $m \neq -1$ sistemul este compatibil determinat iar pentru $m = 0$ sau $m = -1$ deci pentru două valori sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

1.407A Valorile lui $a \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ x + y + z = a \\ x + 2y + z = 2 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$ să aibă soluţie unică. Se calculează determinantul matricei extinse $\Delta = 4a - 3$, deci $a = \frac{3}{4}$.

1.408A Valorile lui $m \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ să aibă numai soluţia banală (nulă). Determinantul Δ trebuie să fie $\neq 0$: $\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 + m + 2$ deci $m \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$.

1.409A Valorile lui $m \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul $x + my + z = 0$, $mx + y + z = 0$, $x + y + mz = 0$ să aibă şi soluţii nebanale (nenule) sunt date de anularea determinantului sistemului $\Delta = (m+2)(m-1)^2$ deci $m = -2$, $m = 1$.

1.410A Sistemul $\begin{cases} ax + y = a \\ bx - y = b \end{cases}$ este compatibil nedeterminat $\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0$ $(a, b \in \mathbf{R})$ sau $a = 0$, $b = 0$ $(a, b \in \mathbf{C})$: determinantul sistemului $\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{vmatrix} = -(a + b) = 0$ şi determinantul caracteristic $\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & a \\ -1 & -b \end{vmatrix} = a - b = 0$ deci $a = b = 0$.

1.411A Fie $A = \{m, m \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} mx + 2y = 2m - 2 \\ 2x + my = m \end{cases}$ are soluţie unică$\}$ şi $S_m = x_m + y_m$, $m \in A$, unde (x_m, y_m) este soluţia sistemului. Avem $A = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$: $S_m = \frac{3m-2}{m+2}$, $\Delta = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4$,

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2m-2 & 2 \\ m & m \end{vmatrix} = 2m(m-2)$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 2m-2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = (m-2)^2$; $\Delta \neq 0$

dacă $m \neq \pm 2$, $x_m = \frac{2m}{m+2}$, $y_m = \frac{m-2}{m+2}$, $S_m = \frac{3m-2}{m+2}$.

1.412A Sistemul $2x + y - z = -1$, $x + 5y + 4z = 4$, $x + 2y + z = m$, $m \in \mathbf{R}$ este compatibil nedeterminat dacă rangul matricei extinse este 2 (rangul matricei sistemului este 2, determinantul ei fiind 0) deci $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = 9m - 9 = 0$, $m = 1$.

1.413A Deoarece inversa matricei $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ este $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ soluţia ecuaţiei $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ este

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

1.414A Sistemul $mx + 2y - z = 2$, $x + (m+2)y - 2z = m + 2$, $x + y + (m-1)z = m + 2$ este compatibil dacă $m \neq 1$

$$\Delta = (m+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & m+2 & -2 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = (m+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & -1 & m \end{vmatrix} =$$
$$= (m+1)^2(m-1).$$

Pentru $m \neq -1$, $m \neq 1$ este compatibil determinat, pentru $m = -1$ este compatibil nedeterminat (determinantul caracteristic este 0), şi pentru $m = 1$ este incompatibil.

1.415B Fie sistemul $\begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ 2x - y + 3z - 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x + (a-1)y + 2z + a^5 t = 0 \end{cases}$ şi $A = \{a \in \mathbf{R} |$ sistemul admite şi soluţii nebanale$\}$, iar $S = \sum_{a \in A} a$. Atunci $S = 0$. Determinantul sistemului $\Delta(a) = -a(3a^4 - 2) = 0$, $a_1 = 0$, $a_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $S = 0$.

1.416B Numărul k al tripletelor $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$ pentru care rangul matricei $\begin{pmatrix} a^3 & 1 & c^2 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & b^3 \end{pmatrix}$ este egal cu 1 este $k = 6$: toţi minorii de ordinul doi trebuie să fie 0. Rezultă $a = -1$, $c = \pm\sqrt{2}i$, $b^3 + 2 = 0$ deci 3 valori ia $b \Rightarrow k = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

1.417B Suma $S=\alpha+\beta$ pentru care sistemul $\begin{cases} x-\alpha y+2z=1 \\ 2x+2y+z=0 \\ x+y-z=\beta \end{cases}$ este compatibil nedeterminat este $S=-3$. Determinantul sistemului este $\Delta(\alpha)=-3(\alpha+1)$ iar determinantul caracteristic $\Delta(\beta)=-3(\beta+2)$ deci $\alpha=-1$ şi $\beta=-2$, iar $S=-3$.

1.418B Valoarea determinantului $\Delta=\begin{vmatrix} \frac{a}{b} & \frac{b}{c} & \frac{c}{a} \\ a & b & c \\ ab & bc & ca \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \\ 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \end{vmatrix} =$ $abc\begin{vmatrix} \frac{1}{b} & \frac{1}{c}-\frac{1}{b} & \frac{1}{a}-\frac{1}{b} \\ 1 & 0 & 0 \\ b & c-b & a-b \end{vmatrix} = -abc\begin{vmatrix} \frac{b-c}{bc} & \frac{b-a}{ba} \\ c-b & a-b \end{vmatrix} = (b-c)(a-b)(c-a).$

1.419B Valorile parametrilor reali α şi β pt. care sistemul $\begin{cases} 2x-y-4z=6 \\ \alpha x-y+z=2 \\ 2x+\beta y-4z=2\beta \end{cases}$ este compatibil nedeterminat. Determinantul sistemului şi determinantul caracteristic sunt $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ \alpha & -1 & 1 \\ 2 & \beta & -4 \end{vmatrix}$, $\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ \alpha & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2\beta \end{vmatrix}$, $\Delta=-2(\beta+2\alpha+2\alpha\beta+1)=0$, $\Delta_1=4(\beta-2\alpha\beta+6\alpha-3)=0$, $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}$.

1.420B Să se determine matricea $M=A^2+2AB+B^2$ dacă $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $A^2=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$, $2AB=\begin{pmatrix} 14 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $M=\begin{pmatrix} 25 & 8 \\ -11 & 14 \end{pmatrix}$.

1.421B Dacă $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, atunci $A^n=(2^n-1)A+(2-2^n)I_2$. Se verifică direct pe grilă luând $n=1,2,3$ sau prin inducţie: $A^2=3A-2I_2=2A+A-2I_2$, $A^{n+1}=A^nA=[(2^n-1)A+(2-2^n)I_2]A=(2^n-1)A^2+(2-2^n)A=(2^n-1)(2A+A-2I)+2A-2^nA=2^{n+1}A-2A+2^nA-A-2^{n+1}I_2+2I_2+2A-2^nA=(2^{n+1}-1)A+(2-2^{n+1})I_2$ deci $P_n\to P_{n+1}$.

1.422B Pentru matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ să se calculeze A^n, $n\geq 1$. Dacă notăm $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ atunci $A=I_3+B$ şi deoarece $I_3B=BI_3$ se aplică binomul lui Newton pentru calculul $A^n=(I_3+B)^n$ şi se ţine cont că $B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3=0$, $B^n=0$, $n\geq 3$; rezultă $A^n=I_3+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2=\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.423B Urma (suma elementelor de pe diagonala principală) matricei X care satisface ecuaţia $A^nX=B^n$ unde $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Avem $A^n=\left(I_2+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^n=I_2+n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^n=\left(I_2+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)^n=I_2+n\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$ (am folosit proprietăţile $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k=0$, $k\geq 2$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^k=0$, $k\geq 2$) deci $X=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+n^2 & -n \\ -n & 1 \end{pmatrix}$ deci urma lui X este n^2+2.

1.424B Matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ este nesingulară (există A^{-1}, deci $\det A\neq 0$) $\Leftrightarrow (b-a)(c-a)(c-b)\neq 0$; $\det A=(b-a)(c-a)(c-b)$, determinantul este Vandermonde.

1.425B Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} m & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care există $a,b,c\in\mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât $aA+bB+cC=0$. Rezultă sistemul $\begin{cases} a+mc=0 \\ 2a+b+3c=0 \\ 2a-b+2c=0 \end{cases}$ cu determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=5-4m=0$ deci $m=\frac{5}{4}$.

1.426B Matricele A, A^2, A^3, A^4 în această ordine sunt $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = I_4$ deci $A^{20} = (A^4)^5 = I_4$.

1.427B Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ unde $x_1 \geq x_2 \geq x_3$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ este $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ecuaţia se scrie $(x-1)^2(x+1)$ deci $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ cu $\det A = -4$, matricea complemenţilor algebrici (egală cu transpusa ei) şi inversa sunt

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.428B Determinantul D al matricei $A \in M_3(\mathbf{R})$ cu elementele $a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i+1}, & 1 \leq j \leq i \leq 3 \\ 0, & 1 \leq i < j \leq 3 \end{cases}$ este $D = \frac{1}{24}$; $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $D = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$.

1.429B Valorile lui a pentru care sistemul $\begin{cases} (1+a)x + y + z = 1 \\ x + (1+a)y + z = a \\ x + y + (1+a)z = a^2 \end{cases}$ este incompatibil sunt $a = -3$, $a = 0$. Determinantul sistemului şi determinantul

caracteristic pentru $a = -3$ sunt

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = (a+3)a^2, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$$

deci pentru $a \neq -3$ şi $a \neq 0$ sistemul este compatibil determinat, pentru $a = -3$ sistemul este incompatibil iar pentru $a = 0$ sistemul este tot incompatibil deoarece determinanţii caracteristici $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ sunt diferiţi de 0.

1.430B Sistemul cu coeficienţi în $\mathbf{Z}_7$: $\begin{cases} mx + y + z = \hat{1} \\ \hat{2}x + \hat{3}y + mz = m \\ x + my + z = m^2 \end{cases}$ este compatibil pentru orice $m \in \mathbf{Z}_7$, determinantul său este $\Delta = -m^3 + \hat{6}m - \hat{5}$ cu $m = \hat{1}$ rădăcină, deci pentru $m \neq \hat{1}$ soluţie unică (Cramer) iar pentru $m = \hat{1}$ determinantul caracteristic este $\hat{0}$.

1.431B Expresia $E = \frac{x^2+y^2+2z^2+2t^2}{2x^2+2y^2+z^2+t^2}$ unde x, y, z, t reprezintă o soluţie nenulă arbitrară a sistemului $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ x + 4y + 9y + 16t = 0 \end{cases}$ are valoarea $E = 1$. Considerând y, z, t necunoscute principale şi x parametru, sistemul $y+z+t = -x$, $2y + 3z + 4t = -x$, $2^2y + 3^2z + 4^2t = -x$ are determinantul Vandermonde $D = 2$ şi $\Delta_y = -6x$, $\Delta_z = 6x$, $\Delta_t = -2x$, $y = -3x$, $z = 3x$, $t = -x$, $E = \frac{x^2+9x^2+18x^2+2x^2}{2x^2+18x^2+9x^2+x^2} = 1$.

1.432B Sistemul $\begin{cases} ax + a^2y + z = 1 \\ ax + ay + a^2z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$ având $\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ a^2 & a & a^2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -(1+a+a^2)(x-1)^2a$ este de tip Cramer pentru $a \neq 1$, este compatibil nedeterminat pentru $a = 0$ (sistemul devine $z = 1, x+y = 0$) iar pentru $a = 1$ sistemul este compatibil dublu nedeterminat (se reduce la o ecuaţie $x + y + z = 1$).

1.433B Sistemul $\begin{cases} x + z = a \\ x + (a^2-1)y + z = a \end{cases}$ echivalent cu $\begin{cases} x + z = 0 \\ (a^2-1)y = 0 \end{cases}$ este compatibil dublu nedeterminat pentru $a = \pm 1$ cu soluţia $(x, y, z) = (x, y, -x)$.

1.434B Sistemul $\begin{cases} x + y + \alpha z = -\alpha \\ x + \alpha y + z = \alpha + 1 \\ \alpha x + y + z = \alpha + 1 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ cu $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\alpha+2)(\alpha-1)^2$ admite soluţie unică (Cramer) pentru $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$.

1.435C Sistemul $\begin{cases} 2x+y=8 \\ x-y=1 \\ 5x+4y=m \end{cases}$ cu $\Delta_m = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & m \end{vmatrix} = -3m+69$ determinantul caracteristic (determinantul matricei extinse) este compatibil pentru $m=23$ (direct, x, y din primele două ecuaţii, $x=3$, $y=2$ le înlocuim în ultima rezultă $m=23$).

1.436C Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $C = BAB^{-1}$, atunci $C^{20} = \begin{pmatrix} 3^{20} & 2^{20}-3^{20} \\ 0 & 2^{20} \end{pmatrix}$: $C^{20} = BA^{20}B^{-1}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^{20} = \begin{pmatrix} 2^{20} & 0 \\ 0 & 3^{20} \end{pmatrix}$, $C^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{20} & 0 \\ 0 & 3^{20} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{20} & 2^{20}-3^{20} \\ 0 & 2^{20} \end{pmatrix}$.

1.437C Dacă $A \in M_2(\mathbf{R})$, $A = \left\{ \begin{matrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix} \right)$ să se determine $n \in \mathbf{N}^*$, $n \leq 15$ astfel încât $A^n = I_2$. $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{4}}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$, $R_0 = I_2$, $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$, $R_\theta^n = R_{n\theta}$ deci $A^n = (R_{\frac{\pi}{4}})^n = R_{n\frac{\pi}{4}}$ de unde $n=8$.

1.438C Valoarea lui $a \in \mathbf{R}$ pentru care $I_n + aA$ este inversabilă unde A este o matrice de ordinul n cu toate elementele egale cu 1, este $a \neq -\frac{1}{n}$. Avem

$$\det(I_n+aA) = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & \dots & a & a \\ a & a+1 & a & \dots & a & \\ a & a & a+1 & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & a & a+1 \end{vmatrix} = (na+1)$$

(adunăm toate liniile la prima , dăm factor $na+1$ şi apoi scădem prima coloană din celelalte; $\det(I_n+aA) \neq 0$, $a \neq -\frac{1}{n} \Rightarrow I_n + aA$ este inversabilă.

1.439C Urma S_n a matricei A^n, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ este S_n.

Dacă $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$, A_1, A_2 celule pătrate, atunci $A^n = \begin{pmatrix} A_1^n & O \\ O & A_2^n \end{pmatrix}$ deci $A^n = 2^n \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = 2^n \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{3} & -\sin\frac{n\pi}{3} & 0 \\ \sin\frac{n\pi}{3} & \cos n\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $S_n =$

$2^n(1+2\cos\frac{n\pi}{3})$.

1.440C Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$; $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbf{R}$, şi matricele $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, relaţia $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$ este incorectă: AB este o matrice pătrată $n \times n$, $AB \in M_n(\mathbf{R})$, $AB = (a_{ij} = x_iy_j)$, $BA = y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n$ este un număr (matrice unidimensională) $\det A$, $\det B$ nu există pentru $n > 1$.

1.441C Fie $A \in M_n(\mathbf{R})$ cu $\det A = 0$. Atunci $(\exists)B \in M_n(\mathbf{R})$, $B \neq 0_n$ astfel încât $AB = 0_n$. Într-adevăr, sistemul $AB = 0_n$ cu necunoscutele coeficienţii $b_1, b_2, \dots, b_n$ ai matricei $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_n & \dots & b_n \end{pmatrix}$ este liniar, omogen, de determinant nul, deci admite soluţii nebanale.

1.442C Fie D un determinant de ordinul trei ale cărui elemente sunt 1 sau -1. Atunci $|D| = 4$. Într-adevăr, prin schimbări de linii sau coloane între ele şi prin înmulţiri cu -1 ale unor linii sau coloane $|D|$ nu se schimbă. Rămân de studiat cazurile $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$ şi $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$ etc.

1.443C Valoarea determinantului $D = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ unde x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - 2x^2 + 2x + 7 = 0$ este $D = 4$. Avem

$$D = (x_1+x_2+x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3-x_2 & x_1-x_2 \\ x_3 & x_1-x_3 & x_2-x_3 \end{pmatrix} =$$

$= -2[(x_1^2+x_2^2+x_3^2) - (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)] = -2[(x_1+x_2+x_3)^2 - 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)] = -2(4-6) = 4$. Altfel $D = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3+x_2^3+x_3^3)$.

1.444C Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $AX = B$, unde ε este o rădăcină cubică complexă a unităţii atunci S suma modulelor elementelor matricei X este $S = 3$. Inversa matricei A: $\det A = 3(\varepsilon^2 - \varepsilon)$, $\varepsilon^2+\varepsilon+1 = 0$, $|\varepsilon| = |\varepsilon^2| = 1$.

$$A' = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon^2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon^2-\varepsilon & \varepsilon^2-\varepsilon & \varepsilon^2-\varepsilon \\ \varepsilon^2-\varepsilon & \varepsilon-1 & -\varepsilon^2+1 \\ \varepsilon^2-\varepsilon & -\varepsilon^2+1 & \varepsilon-1 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

de unde $S = \frac{1}{3}(5+2|\varepsilon|+2|\varepsilon^2|) = 3$. Altfel, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se obţin 3 sisteme cu necunoscutele liniile matricei A^{-1}.

1.445C Valoarea lui $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât $\det(\lambda A) = 1$, unde A este o matrice nesingulară de ordinul n cu $\Delta = \det A > 0$ este $\lambda = \frac{1}{\sqrt[n]{\Delta}}$. Evident $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A = 1 \Rightarrow \lambda^n = \frac{1}{\Delta}$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt[n]{\Delta}}$.

1.446C Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3 + px + q = 0$ şi

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \text{ atunci } \Delta^2 = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & x_1+x_2+x_3 & x_1^2+x_2^2+x_3^2 \\ x_1+x_2+x_3 & x_1^2+x_2^2+x_3^2 & x_1^3+x_2^3+x_3^3 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 & x_1^3+x_2^3+x_3^3 & x_1^4+x_2^4+x_3^4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & -3q \\ -2p & -3q & 2p^2 \end{pmatrix} = -4p^3 - 27q^2$$

deoarece $x_1+x_2+x_3 = 0$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) = -2p$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3 = -p(x_1+x_2+x_3) - 3q = -3q$, $x_1^4+x_2^4+x_3^4 = -p(x_1^2+x_2^2+x_3^2) - q(x_1+x_2+x_3) = 2p^2$.

1.447C Matricea $C = AB - BA$ are urma (suma elementelor de pe diagonala principală) egală cu 0 pentru $(\forall)A, B \in M_n(\mathbf{R})$. Pentru simplitate luăm $n = 3$. Matricele AB şi BA au urmele $(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}) + (a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33})$ respectiv $(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32}) + (b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33})$ deci $AB - BA$ are urma 0. În general urma matricei $AB - BA = Tr(AB - BA) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} =$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right) - \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}b_{ij}\right) = 0$$
(în $Tr\,BA$ am schimbat ordinea de sumare.

1.448C Valorile lui $\lambda \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$ admite o infinitate de soluţii, deci pentru care $\Delta = 0$ sunt $\lambda \in \{-2, 1\}$ deoarece $\Delta = (\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2, \lambda = 1$.

1.449C Sistemul $\begin{cases} x + y + z = c \\ ax + by + (a+b)z = 0 \\ a^2x + b^2x + (a+b)^2z = 0 \end{cases}$ cu $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & a+b \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = ab(b-a)$, pentru $a = 0$ şi $b \neq 0$ sistemul este compatibil pentru $(\forall)c \in \mathbf{R}$. Dacă $a \neq 0$, $b \neq 0$, $b \neq a$ avem sistem Cramer (compatibil determinat, soluţie unică), dacă $b = a$ sistemul este compatibil pentru $c = 0$ (când $c \neq 0$ sistemul este incompatibil); când $b = 0$, $a \neq 0$ sistemul este compatibil, iar $a = 0$, $b \neq 0$ la fel pentru $(\forall)c$.

1.450C Sistemul

$$\begin{cases} ax + (3a+4)y + 2(a+1)z = 0 \\ ax + (4a+2)y + (a+4)z = 0 \\ 2x + (3a+4)y + 3az = 0 \end{cases} \quad \text{cu} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & 3a+4 & 2(a+1) \\ a & 4a+2 & a+4 \\ 2 & 3a+4 & 3a \end{vmatrix} =$$

$$= 6(a+1)\begin{vmatrix} 1 & 3a+4 & 2(a+1) \\ 0 & a-2 & -a+2 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = 6(a+1)(a-2)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -1, a = 2:$$

pentru $a = -1$ sistem compatibil simplu nedeterminat (rangul matricii este 2) iar pentru $a = 2$ compatibil dublu nedeterminat (rangul matricii este 1).

1.451C Numărul n de soluţii ale sistemului $\begin{cases} |x| + |x+y| = 3 \\ 2|x| - 3|x+y| = -4 \end{cases}$ este $n = 4$. Rezultă $|x| = 1$, $|x+y| = 2$ deci $x = \pm 1$, $x + y = \pm 2$ şi avem soluţiile $(1,1), (1,-3), (-1,3), (-1,-1)$ deci $n = 4$.

1.452C Dacă $a,b,c \in \mathbf{R}$ şi $a2^n + b3^n + c3^n = 0$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$ atunci $a = b = c = 0$. Dăm lui n valorile 0,1,2 şi obţinem sistemul $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+3b+4c=0 \\ 2^2a+3^2b+4^2c=0 \end{cases}$ cu determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ deci avem numai soluţia banală $a = b = c = 0$.

1.453C Dacă (x,y,z) este soluţie nenulă a sistemului $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+9y+z=0 \\ x-3y+2z=0 \end{cases}$ atunci expresia $E = \frac{x+y+z}{x+y-z}$ are valoarea $E = \frac{1}{11}$. Obţinem, rezolvând în raport cu x şi z (sistemul admite şi soluţii nebanale, $\Delta = 0$), $z = 5y$, $x = -7y$ deci $E = \frac{-7y+y+5y}{-7y+y-5y} = \frac{1}{11}$.

1.5 Structuri algebrice

1.454A Familia G a matricelor de forma $A_x = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ x & 1-x \end{pmatrix}$ înzestrată cu înmulţirea matricelor este un grup comutativ:

$$A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 1-(x+y-2xy) & x+y-2xy \\ x+y-2xy & 1-(x+y-2xy) \end{pmatrix} = A_{x+y-2xy},$$

$A_0 = I_2$, A_x este inversabilă $\forall x \in \mathbf{R}$, $x \neq \frac{1}{2}$, $(A_x)^{-1} = A_{\frac{x}{2x-1}}$, comutativitatea este evidentă, iar asociativitatea este proprietatea pe care o au matricile din $M_n(\mathbf{R})$. Deci $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

1.455A Mulţimea $[2,\infty)$ este stabilă la operaţia $x \circ y = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ definită pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ deoarece $t + \frac{1}{t} \geq 2$ pentru $t > 0$ $(t^2 - 2t + 1 \geq 0)$.

1.456A Dacă pe $G = (2,\infty)$ se dă legea de compoziţie $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6 = (x-2)(y-2) + 2$ $(\forall)x,y \in G$ atunci $x \circ x \circ x \circ x = (x-2)^4 + 2$: $x \circ x = (x-2)^2+2$, $(x \circ x) \circ x = ((x-2)^2+2) \circ x = ((x-2)^2+2-2)(x-2)+2 = (x-2)^3+2$, $x \circ x \circ x \circ x = ((x-s)^3+2-2)(x-2)+2 = (x-2)^4+2$.

1.457A Suma S a elementelor inversabile din $\mathbf{Z}$ în raport cu legea $\circ$ dată de $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$, $\forall x,y \in \mathbf{Z}$ este $S = 4$: din egalitatea $x \circ e = xe - 2x - 2e + 6 = x \Rightarrow x(e-3) - 2(e-3) = 0$ rezultă că elementul neutru este $e = 3$, iar din egalitatea $x \circ x' = xx' - 2x - 2x' + 6 = 3 \Rightarrow x' = \frac{2x-3}{x-2} = 2 + \frac{1}{x-2}$ rezultă $x - 2 = \pm 1$, deci $x = 3$ şi $x = 1$ sunt inversabili, $S = 3 + 1 = 4$.

1.458A Fie $G = \{x,y,z,t\}$ şi legea de compoziţie definită prin tabela

$\circ$	x	y	z	t
x	y	a	b	z
y	x	y	z	t
z	c	d	y	z
t	z	e	x	f

$(G,\circ)$ este grup dacă şi numai dacă $a = x$, $d = z$, $b = e = c = t$, $f = y$. Se observă că y este elementul neutru (conform liniei lui y deci pe coloana lui y trebuie să avem $a = x$, $d = z$, $e = t$. Pe fiecare linie şi coloană orice element apare o singură dată, deci completăm tabelul $b = t$, $c = t$, $f = y$.

1.459A Pe mulţimea $G = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax | a \in \mathbf{R}\}$ se defineşte legea de compoziţie $*$ prin $(f * g)(x) = x(f'(x) + g'(x))$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci $(G,*)$ este grup comutativ: $(f * g)(x) = x(a+b) = ax + bx = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$ $(g(x) = bx, b \in \mathbf{R})$ deci legea $*$ este de fapt adunarea funcţiilor de forma $f(x) = ax$, $f \in G$; funcţia nulă $f(x) = 0$ $(\forall)x \in \mathbf{R}$ elementul neutru, simetrica lui f este $-f$, $-f(x) = -ax$, G este stabilă la operaţia $*$, asociativitatea şi comutativitatea sunt evidente, Deci $(G,*)$ este grup comutativ.

1.460A Pe mulţimea $G = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax^2 + bx | a,b \in \mathbf{R}\}$ se defineşte legea de compoziţie $*$ prin $(f * g)(x) = x(f'(x) + g'(x))$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$. Atunci legea $*$ nu are element neutru: $f(x) = ax^2 + bx$, $e(x) = cx^2 + dx$, $(f*e)(x) = x(f'(x) + e'(x)) = x(2ax + b + cx + d) = x^2(2a+2c) + x(b+d) = f(x) = ax^2 + bx \Rightarrow 2a + 2c = a$, $b = b + d$ deci $c = -\frac{a}{2}$, $d = 0$; aceasta ar însemna că pentru fiecare f avem un element neutru (e depinde de f), absurd.

1.461A Fie G mulţimea funcţiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de două ori derivabile pe $\mathbf{R}$ care verifică $f'(x) + 2f(x) = 0$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$. Pe G considerăm adunarea $h = f + g$ definită de $h(x) = f(x) + g(x)$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$. Atunci $(G,+)$ este grup comutativ. Avem $\frac{df}{f} = -2dx$, $\ln f = -2x + \ln a \Rightarrow f(x) = ae^{-2x}$, a constant. $g(x) = be^{-2x}$, $(f+g)(x) = (a+b)e^{-2x}$, elementul neutru este funcţia 0, $f(x) = 0$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$, elementul simetric al lui f, $f' = -f$ deci $(G,+)$ este un grup comutativ .

1.462A Pe mulţimea $G = \{2,4,6,8\} \subset \mathbf{Z}$ definim legea de compoziţie prin $x * y =$ ultima cifră a produsului numerelor întregi x,y. Formăm tabela operaţiei $*$:

x	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

Observăm că elementul neutru este 6 şi simetricul lui 2 este 8, al lui 8 este 2, iar 4 şi 6 sunt propriile lor simetrice; $(G,*)$ este grup.

1.463A Valorile lui λ şi μ pentru care relaţia $x*y=2\lambda x+\mu y+xy$ defineşte pe $\mathbf{R}$ o lege de compoziţie asociativă, comutativă şi 0 este element neutru sunt $\lambda=\frac{1}{2}$, $\mu=1$: din comutativitate rezultă $\mu=2\lambda$, iar din asociativitate avem $(2\lambda-4\lambda^2)x+(\mu^2-\mu)z+(\mu-2\lambda)xz=0$ deci $\lambda=\frac{1}{2}$, $\mu=1$ şi legea devine $x*y=x+y+xy$, 0 este elementul neutru.

1.464A Legea de compoziţie $x*y=xy-2x-2y+\lambda$, $\lambda\in\mathbf{R}$ defineşte o structură de grup pe $G=(2,\infty)$ dacă $\lambda=6$ deoarece din $x*y=(x-2)(y-2)+\lambda-4\Rightarrow G$ stabil la $*\Leftrightarrow\lambda=6(\lambda-4=2)$.

1.465A Pe mulţimea Q se definesc legile de compoziţie $x\circ y=\frac{1}{4}xy-2x-2y+24$ şi $x*y=x+y+2$, $(\forall)x,y\in Q$, cu elementele neutre e_1 şi e_2. Atunci $e_1*e_2=12$: $x\circ e_1=\frac{1}{4}xe_1-2x-2e_1+24=x\Rightarrow x(\frac{e_1}{4}-3)+24-2e_1\equiv 0$ deci $e_1=12$ iar $e_2=-2$; $e_1*e_2=12*(-2)=12-2+2=12$.

1.466A Numărul n de soluţii ale ecuaţiei $\hat{2}x=\hat{0}$ în inelul $\mathbf{Z}_6$ este $n=2$: $x_1=\hat{0}$, $x_2=\hat{3}$.

1.467A Operaţia $x*y=x+ay$, $a\in\mathbf{R}$ determină un grup abelian pe $\mathbf{R}$ pentru $a=1$: $x*y=x+ay=y+ax=y*x\Rightarrow(x-y)(1-a)=0$ deci $a=1$.

1.468A Pe mulţimea $\mathbf{C}$ definim legea de compoziţie $z*w=z+w-zw$; atunci $(\forall)z\in\mathbf{C}\setminus\{1\}$ este simetrizabil în raport cu operaţia $*$: din egalitatea $z*e=z+e-ze=z\Rightarrow e=0$ elementul neutru iar $z*z'=z+z'-zz'=0\Rightarrow z'=\frac{z}{z-1}$ deci $(\forall)z\in\mathbf{C}$, $z\neq 1$ este simetrizabil.

1.469A Valorile $\lambda\in\mathbf{R}$ pentru care intervalul $(2,\infty)$ este parte stabilă la legea $x*y=xy-2x-2y+\lambda$, $x,y\in\mathbf{R}$ sunt $\lambda\in(6,\infty)$, $x*y=(x-2)(y-2)+\lambda-4>2\Rightarrow\lambda>6$.

1.470A Soluţiile ecuaţiei $x^2-x-\hat{1}=\hat{0}$ în $\mathbf{Z}_5$ sunt $x=\hat{3}$. $x=\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{4}$ nu verifică.

1.471A Din următoarele legi de compoziţie definite pe $\mathbf{R}$: 1° $x*y=|x-y|$; 2° $x*y=xy-2(x+y)$; 3° $x*y=xy-2x-3y$; 4° $x*y=x+y+1$, 5° $x*y=\sin(x+y)$; 6° $x*y=\ln(1+|xy|)$ observăm că numai 3° este necomutativă.

1.472A Pentru orice $x\in\mathbf{Z}$ notăm cu $\hat{x}$ şi $\bar{x}$ clasele lui x în $\mathbf{Z}_5$ respectiv în

$\mathbf{Z}_3$. Să se determine numerele $x\in\mathbf{Z}$ $1\leq x\leq 15$ astfel încât $\hat{x}^2-4\hat{x}+3=0$, $\bar{2}\bar{x}^2+\bar{x}=0$. Avem $\hat{x}=\hat{3}$, $\hat{x}=\hat{1}$ deci numerele 3,8,13,1,6,11 iar $\bar{x}=\bar{0}$, $\bar{x}=\bar{1}$ deci numerele 3,6,9,12,15,14,7,10,13. Intersecţia este 1,3,6,13.

1.473A In spaţiul E al polinoamelor de grad cel mult 3 care verifică $P(1)=0$, $P'(1)=0$, polinoamele $(x-1)^2$, $x(x-1)^2$ formează o bază pentru E. Într-adevăr E este format din polinoamele de forma $P(x)=(x-1)^2(ax+b)$ ($x=1$ este rădăcină pentru P şi pentru P' deci $P(x)=(x-1)^2(ax+b)$) deci polinoamele $(x-1)^2$ şi $x(x-1)^2$ generează pe E şi sunt liniar independente.

1.474A Numărul $\alpha\in\mathbf{R}$ astfel încât vectorii $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(2,4,\alpha)$, $v_3=(1,1,5)$ să formeze o bază pentru $\mathbf{R}^3$ este $\alpha\neq 6$: combinaţia nulă $xv_1+yv_2+zv_3=0$: $(x+2y+z,2x+4y+z,3x+\alpha y+5z)=(0,0,0)$ este banală (deci $x=y=z=0$) dacă sistemul scalar echivalent şi respectiv determinantul său Δ, $\begin{cases}x+2y+z=0\\2x+4y+z=0\\3x+\alpha y+5z=0\end{cases}$, $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&4&1\\3&\alpha&5\end{vmatrix}$ are numai soluţia banală $x=y=z=0$ respectiv $\Delta=\alpha-6\neq 0$ deci $\alpha\neq 6$.

1.475A Valoarea $\alpha\in\mathbf{R}$ pentru care vectorii $v_1=(1,\alpha,0)$, $v_2=(0,1,2)$, $v_3=(2,5,2)$ din $\mathbf{R}^3$ sunt liniar dependenţi este $\alpha=2$: Combinaţia nulă $xv_1+yv_2+zv_3=0$, $(x+2z,\alpha x+y+5z,2y+2z)=(0,0,0)$ este nebanală, (adică nu toţi x,y,z sunt nuli) dacă sistemul scalar echivalent şi respectiv determinantul $\begin{cases}x+2z=0\\\alpha x+y+5z=0\\2y+2z=0\end{cases}$, $\Delta=\begin{vmatrix}1&0&2\\\alpha&1&5\\0&2&2\end{vmatrix}$ are soluţii nebanale, $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ respectiv $\Delta=4\alpha-8=0$ deci $\alpha=2$.

1.476A În $\mathbf{R}^3$ orice trei vectori liniar independenţi formează o bază (deoarece dimensiunea spaţiului este 3). Se arată uşor că generează pe $\mathbf{R}^3$: Determinantul format cu componentele celor 3 vectori este diferit de 0 şi rezultă un sistem Cramer (liniar neomogen).

1.477A Componentele vectorului $v=(0,3,-1)$ în raport cu baza $B=\{v_1=(1,1,2),v_2=(1,1,0),v_3=(1,0,1)\}$ sunt $(x,y,z)=(1,2,-3)$: $v=(0,3,-1)=xv_1+yv_2+zv_3=(x+y+z,x+y,2x+z)\Rightarrow x+y+z=0,x+y=3,2x+z=-1$ deci $(x,y,z)=(1,2,-3)$.

1.478A Coordonatele vectorului $v=(10,2,7)$ în baza $\{f_1,f_2,f_3\}$ a lui $\mathbf{R}^3$, dacă $f_1=(1,-1,2)$, $f_2=(2,0,1)$, $f_3=(1,1,0)$. Idem ca în 1.477A, $v=(10,2,7)=xf_1+yf_2+zf_3=(x+2y+z,-x+z,2x+y)\Rightarrow x+2y+z=10,-x+z=2,2x+y=7$, deci $(x,y,z)=(3,1,5)$.

1.479A Dimensiunea spaţiului vectorial $V=\{f:\mathbf{Z}_2\to\mathbf{Z}_2\}$ este 2. $B=\{f_1,f_2\}$, $f_1(\hat{0})=\hat{1}$, $f_1(\hat{1})=\hat{0}$, $f_2(\hat{0})=\hat{0}$, $f_2(\hat{1})=\hat{1}$.

1.480A O bază a spaţiului vectorial $Q(\sqrt{2}) = \{x \in \mathbf{R} | x = a + b\sqrt{2}, a, b \in Q\}$ peste Q este $\{1, \sqrt{2}\}$: generează pe $Q(\sqrt{2})$ evident şi sunt liniar independenţi $x \cdot 1 + y\sqrt{2} = 0$, $x, y \in Q \Rightarrow x = y = 0$, altfel $\sqrt{2} = -\frac{x}{y} \in Q$, fals.

1.481A Un vector e_3, astfel încât sistemul $\{e_1, e_2, e_3\}$ cu $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 0)$ să fie liniar independent este imposibil deoarece $e_2 = -e_1$ sunt dependenţi.

1.482B Dacă p este numărul soluţiilor în $\mathbf{Z}_{12}$ ale sistemului $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{5}y = \hat{7} \\ \hat{3}x + \hat{9}y = \hat{6} \end{cases}$ atunci $p = 3$: $\Delta = \begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{5} \\ \hat{3} & \hat{9} \end{vmatrix} = \hat{3}$ este divizor al lui $\hat{0}$, nu există $\hat{3}^{-1}$, nu putem aplica Cramer. Făcând tabelul înmulţirii se verifică uşor că $(\hat{3}, \hat{5})$, $(\hat{7}, \hat{1})$, $(\widehat{11}, \hat{9})$ sunt soluţii, deci $p = 3$. Altfel, înmulţim prima ecuaţiei cu $\hat{5}$, $\widehat{10}x + y = \widehat{11}$ şi înlocuim $y = \widehat{11} - \widehat{10}x$ în ecuaţia a doua, obţinem $\hat{9}x = \hat{3}$ deci $x_1 = \hat{3}$, $x_2 = \hat{7}$, $x_3 = \widehat{11}$ iar $y_1 = \hat{5}$, $y_2 = \hat{1}$, $y_3 = \hat{9}$.

1.483B Numărul k al elementelor lui $M = \{x \in \mathbf{Z}_{60} | x^3 = \hat{2}\}$. $M = \emptyset$ deoarece nici un număr $n \in \mathbf{N}$, $n \leq 60$ nu are cubul $n^3 = 2, 62, 122, 182, 242, 302, \ldots, 60k + 2$, $k = 1, 2, \ldots, 59$. $n^3 = 60k + 2$ nu are soluţie: $n = 2p + 1 \Rightarrow (2p+1)^3 = 60k + 2$ imposibil, par = impar; $n = 2p \Rightarrow 4p^2 = 30k + 1$ fals, impar = par.

1.484B Pe $\mathbf{Z}$ definim legea de compoziţie $x * y = axy + 2(x + y) + b$, $a, b \in \mathbf{Z}$ şi se cere numărul k al elementelor simetrizabile, presupunând că $(\mathbf{Z}, *)$ este monoid. Elementul neutru e rezultă din egalitatea $axe + 2(x + e) + b = x$, $(ae+1)x + 2e + b \equiv 0 \Rightarrow e = -\frac{1}{a} = -\frac{b}{2}$, $ab = 2$, deci $a = \pm 1$, $b = \pm 2$ şi rezultă două legi $x * y = xy + 2(x+y) + 2$, $x * y = -xy + 2(x+y) - 2$. Asociativitatea dă $(z - x)(ab - 2) = 0 \Rightarrow ab = 2$. Pentru prima lege cu $a = 1, b = 2, e = -1$ elementele simetrice se obţin din $xx' + 2x + 2x' + 2 = -1$, $x' = -2 + \frac{1}{x+2}$, $x + 2 = \pm 1$, $x_1' = -3$, $x_2' = -1$, $k = 2$.

1.485B Fie $G = (-1, 1)$ şi legea $x * y = \frac{ax+by}{1+xy}$, $(\forall) x, y \in G$. Notăm $K = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 | (G, *) \text{ este grup }\}$ şi $S = \sum\limits_{a,b \in K} (a + b)$. Atunci $S = 2$. Elementul neutru $e : x * e = \frac{ax+be}{1+xe} = x$, $x^2 e + x(1 - a) - be \equiv 0$, $1 - a = 0, e = 0, a = 1$. Asociativitate: $\frac{x+xyz+by+b^2z}{1+yz+xy+bxz} = \frac{x+by+bz+bxyz}{1+xy+xz+byz}$ ne dă $b = 1$ deci $S = 2$.

1.486B Să se rezolve în $\mathbf{Z}_{10}$ sistemul $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{8} \\ x + \hat{6}y = \hat{3} \end{cases}$. Deoarece $\Delta = \hat{9}$, $\Delta x = \hat{9}$, $\Delta y = \hat{8}$, $\Delta^{-1} = \hat{9} \Rightarrow x = \hat{1}$, $y = \hat{2}$. Altfel, înlocuim $x = \hat{3} + \hat{4}y$ în prima ecuaţie, $\hat{2}(\hat{3} + \hat{4}y) + \hat{3}y = 8$, $\hat{6} + y = \hat{8}$, $y = \hat{2}$, $x = \hat{1}$.

1.487B Fie $F_k = \{f | f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ bijecţie şi } f(k) = k\}$, $\forall k \in \mathbf{Z}$. Pe fiecare F_k definim legea de compoziţie $\circ$ care reprezintă compunerea obişnuită a funcţiilor. În aceste condiţii $(F_k, \circ)$ este grup pentru orice $k \in \mathbf{Z}$. Deoarece f sunt bijecţii, există f^{-1} elementul simetric al lui f la compunere, aplicaţia identică este elementul neutru, iar din $(f \circ g)(k) = f(g(k)) = f(k) = k$, rezultă că fiecare F_k este stabilă la compunere.

1.488B Polinomul $f = x^2 + x + m$, $m \in \mathbf{Z}_3$ este ireductibil peste $\mathbf{Z}_3$ pentru $m = \hat{2}$ deoarece $x_1 = \hat{0}$, $x_2 = \hat{1}$, $x_3 = \hat{2}$ nu sunt rădăcini pentru f.

1.489B Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | n \in \mathbf{Z} \right\}$ şi "$\cdot$" înmulţirea matricelor. Atunci $(G, \cdot)$ este grup abelian izomorf cu grupul $(\mathbf{Z}, +)$. Notăm $A_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi avem $A_n \cdot A_m = A_{n+m}$, $A_n^{-1} = A_{-n}$, $A_0 = I_2$ deci $(G, \cdot)$ este grup abelian. Izomorfismul este dat de $h(A_n) = n$, $h(A_n \cdot A_m) = h(A_{n+m}) = m + n = h(A_n) + h(A_m)$, $\forall m, n \in \mathbf{Z}$, h este bijecţie.

1.490B Dacă G este un grup cu n elemente, $a \in G$ şi $A = \{ax | x \in G\}$ atunci A are n elemente. Intr-adevăr egalitatea $ax = ay$ are loc dacă $x = y$ $(a^{-1}ax = x = a^{-1}ay = y)$ deci $x \neq y \Rightarrow ax \neq ay$.

1.491B Sistemul $\begin{cases} \hat{3}x + \hat{3}y = \hat{3} \\ \hat{3}x + \hat{5}y = \hat{1} \end{cases}$ în inelul $(\mathbf{Z}_7, +, \cdot)$ are o soluţie $x = \hat{2}$: $\Delta = \hat{6}$, $\hat{6} \cdot \hat{6} = \hat{1}$ deci $\hat{6}^{-1} = 6$ se aplică Cramer. Altfel, înmulţim prima ecuaţie cu $\hat{5}$, obţinem $x + y = \hat{1}$, $\hat{3}x + \hat{5}(1 + \hat{6}x) = \hat{1}$, $\hat{5}x = \hat{3} \Rightarrow x = \hat{2}$.

1.492B Matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sunt divizori ai lui zero în $M_2[\mathbf{R}] \Leftrightarrow a = -b, c = -d$ sau $a = c, b = d$. Trebuie satisfăcute egalităţile $AB = O_2$, $BA = O_2$ deci $AB = \begin{pmatrix} a+b & -(a+b) \\ c+d & -(c+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ adică $a = -b$, $c = -d$ sau $BA = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = c$ şi $b = d$.

1.493B Fie $\sigma, \gamma \in S_3$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se găsească $\xi \in S_3$ astfel încât $\sigma \circ \xi = \gamma$. Avem $\xi = \sigma^{-1}\gamma$, deci trebuie calculat $\sigma^{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 \to 3 \to z = 1$, $2 \to 1 \to x = 2$, $3 \to 2 \to y = 3$, deci $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\xi =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.494B Pe mulţimea $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ se consideră legile de compoziţie $*$ şi o definite de $x * y = \text{arctg}(\text{tg}x + \text{tg}y)$, $x \circ y = \frac{x+y}{2}$. Atunci $(I, *)$ este grup comutativ izomorf cu $(R, +)$. Legea $\circ$ nu are element neutru şi nu este asociativă: $x \circ e = \frac{x+e}{2} = x \Rightarrow e = x$ (fals), $(x \circ y) \circ z = \frac{x+y+2z}{4}$, $x \circ (y \circ z) = \frac{2x+y+z}{4}$. Elementul neutru pentru $*$ este 0, $x * 0 = \text{arctg}(\text{tg}x) = x$, avem asociativitate: $x * (y * z) = \text{arctg}(\text{tg} + \text{tg}(y * z)) = \text{arctg}(\text{tg}x + \text{tg}y + \text{tg}z)$, analog $(x * y) * z = \text{arctg}(\text{tg}x + \text{tg}y + \text{tg}z)$. Simetricul lui x este $-x$, $x * (-x) = \text{arctg}(\text{tg}x + \text{tg} - x)) = 0$.

1.495B Câte polinoame de grad cel mult 4 sunt în inelul $\mathbf{Z}_2[x]$. Un polinom f din $\mathbf{Z}_2[x]$ se scrie $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ unde a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 iau fiecare valori, $\hat{0}, \hat{1}$, deci sunt $2^5 = 32$ polinoame.

1.496B Fie $G = \{I, A, B\}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci $(G, \cdot)$ ($\cdot$ este operaţia de înmulţire a matricelor) este grup. Se verifică uşor că $AB = I$, $BA = I$, $A^2 = B$, $B^2 = A$, deci G este stabilă la operaţia de înmulţire, B şi A sunt simetrice una alteia, operaţia de înmulţire la matrici este asociativă, deci $(G, \cdot)$ este grup.

1.497B Elementele inversabile ale inelului $I = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ cu operaţiile $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$ sunt $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$: în I elementul neutru este (1,1) elementele inversabile în inelul $\mathbf{Z}$ sunt 1 şi -1 iar în I sunt perechi de elemente inversabile, deci cele menţionate (în inelul $I = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ cu înmulţirea $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$, elementul neutru este (1,0), iar elementele inversabile sunt (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), cele care corespund numerelor complexe $1, i, -1, -i$).

1.498B Mulţimea matricelor $M = \{A(a), a \in 0, \infty, A(a) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ cu operaţia de înmulţire a matricelor formează un grup comutativ izomorf cu $(\mathbf{R}_+^*, \cdot)$. Se verifică uşor că $A(a) \cdot A(b) = A(ab)$, $(A(a))^{-1} = A(a^{-1})$, $A(1) = I_2$ deci M este grup comutativ. Izomorfismul cu $(\mathbf{R}_+^*, \cdot)$ este dat de $h(A(a)) = a$, $h[A(a) \cdot A(b)] = h[A(a)] \cdot h[A(b)]$, h este bijecţie.

1.499B Dimensiunea spaţiului V al polinoamelor din $\mathbf{R}[x]$ care au gradul cel mult 5 şi rădăcina 4 este 5, o bază în V fiind dată de $(x-4)$, $x(x-4)$, $x^2(x-4)$, $x^3(x-4)$, $x^4(x-4)$ un polinom $f \in V$ are forma $(x-4)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4)$.

1.500B O bază în spaţiul vectorial S al soluţiilor $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ a ecuaţiei $x + y - 2z = 0$ este $\{v_1 = (0, 2, 1), v_2 = (2, 0, 1)\}$. Soluţiile se scriu $(x, y, z) = (x, 2z - x, z) = x(1, -1, 0) + z(0, 2, 1)$ şi notând $v_3 = (1, -1, 0)$, observăm că $v_2 = 2v_3 + v_1$, deci S este generat de $\{v_1, v_2\}$ sistem liniar independent.

1.501B Dimensiunea spaţiului vectorial al matricelor simetrice din $M_3(\mathbf{R})$ este 6, o bază fiind formată din matricele

$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$.

1.502B Mulţimea N a vectorilor din $\mathbf{R}^3$ a căror imagine prin $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y, y - z)$ este vectorul nul (nucleul lui f este $Kerf = N$) este $N = \{(x, x, x) \in \mathbf{R}^3\}$. Din $x - y, y - z = 0 \Rightarrow x = y = z$ deci $(x, x, x) \in N$.

1.503 Valorile lui $\alpha \in \mathbf{R}$ pentru care aplicaţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (\alpha x + y, 2x + 3y)$ este un izomorfism liniar sunt $\alpha \neq \frac{2}{3}$; vectorii care merg în (0,0) se reduc la (0,0), deci nucleul N al lui f este $0 = (0,0)$: sistemul $\begin{cases} \alpha x + y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ are numai soluţia banală, când $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\alpha - 2 \neq 0$, $\alpha \neq \frac{2}{3}$.

1.504B Precizaţi perechea de funcţii v, w care împreună cu $u(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$ să fie vectori liniar independenţi în spaţiul vectorial real al funcţiilor reale. Luăm $v(x) = xe^x$, $w(x) = e^{2x}$ şi arătăm liniar independenţa: $\alpha e^x + \beta x e^x + \gamma e^{2x} \equiv 0 \Rightarrow (\alpha + \beta x) + \gamma e^x \equiv 0$ deci $\alpha + \beta x \equiv 0$, $\gamma = 0$ (altfel $e^x = \frac{-\alpha - \beta x}{\gamma}$ fals) de unde $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

1.505B Dimensiunea subspaţiului vectorial $P = \{(x, y, z) | x + y + z = 0\} \subset \mathbf{R}^3$ este 2: $P = \{(x, y, z) = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)\}$, deci P este generat de vectorii liniar independenţi $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$.

1.506B Numărul maxim de vectori liniar independenţi în mulţimea soluţiilor sistemului $\begin{cases} x - y + 2z + 4t = 0 \\ 2x + y - 3z + t = 0 \end{cases}$ este 2. Soluţiile se scriu $(x, y, z, t) = (\frac{1}{3}z - \frac{5}{3}t, \frac{7}{3}z + \frac{7}{3}t, z, t) = z(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, 1, 0) + t(-\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 0, 1)$ deci vectorii $v_1(1, 7, 3, 0)$, $v_2 = (-5, 7, 0, 3)$ generează spaţiul soluţiilor, sunt independenţi, dimensiunea spaţiului este 2 deci numărul maxim de soluţii liniar independente este 2.

1.508C Pe mulţimea $R_1[x]$ a polinoamelor de grad ≤ 1 cu coeficienţi reali definim operaţiile "+" şi "*" astfel: $f = ax+b$, $g = cx+d \Rightarrow f+g = h = (a+c)x+b+d$, $f*g = (ad+bc-ac)x+bd-ac$. Atunci $(R_1[x],+,*)$ este corp şi inversul lui $x+1$ este $-x$. ($R_1[x]$ este izomorf cu $\mathbf{R}^2$ deci problema se reduce la $\mathbf{R}^2$ înzestrat cu operaţiile $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$, $(a,b)*(c,d) = (ad+bc-ac, bd-ac)$. Se verifică uşor că $\mathbf{R}^2$ cu operaţia $*$ este corp şi că inversul lui (1,1) este (0,-1).

1.509C În $M_2(\mathbf{Z}_5)$ ecuaţia $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{4} & \hat{3} \end{pmatrix}$ are două soluţii. Notând $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $X^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+yz & (x+t)y \\ (x+t)z & t^2+yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{4} & \hat{3} \end{pmatrix}$ se obţin ecuaţiile 1° $x^2+yz = \hat{3}$; 2° $t^2+yz = \hat{3}$; 3° $(x+t)y = \hat{2}$; 4° $(x+t)z = \hat{4}$ etc. Trebuiesc verificate toate variantele.

Putem avea numai $x^2 = t^2 = \hat{0}, \hat{1}, \hat{4}$ în 1°, 2°. Dar $x^2 = t^2 = 0$ nu verifică 3°, 4°. $x^2 = t^2 = \hat{1}$, $yz = \hat{2}$ ne dă soluţia $x = t = y = \hat{1}$, $z = \hat{2}$.

1.510C Se consideră pe $\mathbf{R}$ legile de compoziţie $x \oplus y = mx + ny - 1$, $x \odot y = 2xy - 2x - 2y + p$. Să se determine m, n, p astfel încât $(\mathbf{R}, \oplus, \odot)$ să fie corp. Elementele neutre e_1, e_2 la $\oplus$ şi $\odot$: $x \oplus e_1 = mx + ne_1 - 1 = x \Rightarrow m = 1$, $e_1 = \frac{1}{n}$, $2xe_2 - 2x - 2e_2 + p = x$, $x(2e_2 - 3) - 2e_2 + p \equiv 0 \Rightarrow e_2 = \frac{3}{2} = \frac{p}{2}$ deci $p = 3$. Din comutativitatea operaţiei $\oplus$ rezultă $mx + ny - 1 = my + nx - 1 \Rightarrow m = n = 1 = e_1$.

1.511C Fie $G = \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}\} \subset \mathbf{Z}_8$, $H = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \widehat{11}\} \subset \mathbf{Z}_{12}$ familiile elementelor inversabile din inelele $\mathbf{Z}_8$, $\mathbf{Z}_{12}$. Atunci G, H sunt grupuri relativ la înmulţirea claselor, sunt izomorfe şi izomorfe cu grupul lui Klein. Conform tablelor operaţiilor, sunt stabile, elementele sunt idempotente $x^2 = \hat{1}$, $xy = z$, $\forall x, y, z$ $x \neq y \neq z \neq \hat{1}$. Tablourile operaţiilor sunt la fel structurate ca la grupul lui Klein.

1.512C Inelul M al matricelor pătrate de ordinul doi cu elemente în inelul claselor de resturi modulo 2, $M_2(\mathbf{Z}_2)$ are $4^2 = 2^4 = 16$ elemente: $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$ deci câte grupe ordonate de câte patru elemente $\hat{0}$ şi $\hat{1}$ (cuvinte de 4 biţi), deci $4^2 = 16$.

1.513C Elementul simetric al unui element x relativ la legea $x * y = \sqrt[n]{y^{\log_n x}}$

$(\forall) x, y \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, pentru $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ fixat este $x' = n^{\log_x n}$. Avem $x * y = y^{\log_n \sqrt[n]{x}}$. Elementul neutru $e : x * e = x = e^{\log_n \sqrt[n]{x}} \Rightarrow \log_n x = \log_n \sqrt[n]{x} \cdot \log_n e$, $\log_n x[\log_n \sqrt[n]{e} - 1] = 0$, $e = n^n$; simetricele: $x * x' = (x')^{\log_n \sqrt[n]{x}} = n^n$, $x' = n^{n^2 \log_x n}$.

1.514C Fie $G = (0,\infty) \setminus \{1\}$, $x * y = x^{\ln y}$ o lege de compoziţie pe G. Atunci $(G, *)$ este grup abelian $x * y = e^{\ln(x^{\ln y})} = e^{\ln x \ln y}$, element neutru numărul e, imetricul x' al lui x, $x' = e^{\frac{1}{\ln x}}$.

1.515C Fie K şi L două corpuri comutative şi $f : K \to L$ un morfism de inele. Atunci f este injectivă. Un morfism de corpuri de la K la L este prin definiţie un morfism de inele $f : K \to L$ (deci $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(x \cdot y) = f(x)f(y)$ şi $f(1) = 1'$, $1 \in K$, $1' \in L$ elemente neutre respectiv în K şi L la înmulţire. Rezultă $f(0) = 0'$, $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in K$. Orice morfism de corpuri este injectiv [15]: fie $x_1, x_2 \in K$, $f(x_1) = f(x_2)$, $x = x_1 - x_2$; presupunem $x \neq 0$ deci există $x^{-1} : f(x) = f(x_1) - f(x_2) = 0'$, $1' = f(1) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1}) = 0' f(x^{-1}) = 0'$ contradicţie, $1' \neq 0'$.

1.516C Fie $(G, \cdot)$ un grup arbitrar şi fie H şi K două submulţimi în G; dacă G este finită, atunci H este subgrup $\Leftrightarrow$ H este stabilă la operaţia: Într-adevăr, fie $H = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$; atunci $\{a_1^2, a_1a_2, a_1a_3 \ldots a_1a_n\} = H$, deci există $s \in \{1, 2, 3, \ldots, n)$ astfel încât $a_1 a_j = a_1$ rezultă că elementul neutru este a_j şi deci aparţine lui H. Analog se arată că orice element din H are simetricul în H.

1.517C Mulţimea matricelor de forma $M(x) = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2(1-x) & 2x-1 \end{pmatrix}$, $x \neq 0$ formează, relativ la înmulţirea matricelor, un grup izomorf cu grupul multiplicativ $\mathbf{R}^*$. Atunci $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} -30 & 31 \\ -62 & 63 \end{pmatrix}$. Putem scrie $M(x) = I_2 + (1-x)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^2 = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ şi aplicăm formula lui Newton $(A+B)^n$ pentru matrici. Mai uşor, direct $M(2) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = I_2 + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = I_2 + B$ iar $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = B$, $B^k = B$ deci $A^5 = I_2 + 5B + 10B^2 + 10B^3 + 5B^4 + B^5 = I_2 + 31B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 31\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & 31 \\ -62 & 63 \end{pmatrix} = (M(2))^5$.

1.518C Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbf{Z}_3$ polinomul $f(x) = \hat{2}x^3 + (a+\hat{1})x + \hat{1} \in$
$\mathbf{Z}_3[x]$ este ireductibil în $\mathbf{Z}_3[x]$? Calculăm $f(\hat{0}) = \hat{1}$, $f(\hat{1}) = a + \hat{2}$, $f(\hat{2}) = \hat{2}a$,
deci $a \neq \hat{1}$ şi rămâne $a = \hat{2}$, $f(\hat{2}) = \hat{1} \neq \hat{0}$, f este ireductibil pentru $a = \hat{2}$.

1.519C Dintre aplicaţiile $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de mai jos: a) $f(x,y) = x + y^2$; b)
$f(x,y) = -x - |y|$; c) $f(x,y) = |x+y|$; d) $f(x,y) = -2x$; e) $f(x,y) = xy$;
f) $f(x,y) = x + y - 1$ singura aplicaţie liniară este d): $f(a(x,y) + b(x,y)) =$
$f(ax + bx_1, ay + by_1) = -2(ax + bx_1) = a(-2x) + b(-2x_1) = af(x,y) +$
$bf(x_1, y)$.

1.520C Perechile $(m,n) \in \mathbf{R}^2$ pentru care aplicaţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y) =$
$(mx + y, 2x + ny)$ verifică egalitatea $f \circ f = 3f$ sunt $(m,n) = (1,2)$ sau
$(m,n) = (2,1)$. Egalitatea se scrie $(f \circ f)(x,y) = f(mx + y, 2x + ny) =$
$(m(mx+y) + 2x + ny, 2(mx+y) + n(2x+ny)) = ((m^2+2)x + (m+$
$n)y, 2(m+n)x + (2+n^2)y) = (3mx + 3y, 6x + 3ny) \Rightarrow m^2 + 2 = 3m$, $m + n = 3$,
$2(m+n) = 6$, $2 + n^2 = 3n$ deci $(m,n) = (1,2)$, $(m,n) = (2,1)$. Altfel, se
poate folosi matricea lui f în baza canonică: $f(x,y) = (ax + by, cx + dy)$ are
matricea $A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ iar $f \circ f = 3f \Rightarrow A_f^2 = 3A_f$ etc.

1.521C Matricea A_f asociată aplicaţiei $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = (2x + y, 7x -$
$3y)$ este $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$: $f(x,y) = x(2,7) + y(1,-3)$, $f(e_1) = f(1,0) =$
$(2,7) = 2e_1 + 7e_2$, $f(e_2) = (1,-3) = 1 \cdot e_1 - 3e_2$ deci coloanele matricei
A_f sunt coordonatele transformatelor prin f ale vectorilor bazei canonice
(e_1, e_2) în raport cu această bază, $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

1.522C Aplicaţia $h = g \circ f - f \circ g$ unde $f(x,y) = (2x + y, x - y)$, $g(x,y) =$
(y,x) este dată de egalitatea $h(x,y) = 3(-y,x)$: $(g \circ f)(x,y) = g(2x + y, x -$
$y) = (x - y, 2x + y)$, $(f \circ g)(x,y) = f(y,x) = (2y + x, y - x)$, $(g \circ f - f \circ$
$g)(x,y) = 3(-y,x)$. Altfel matriceal $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_{g\circ f - f\circ g} = A_g \cdot A_f - A_f \cdot A_g = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$,
deci $h(x,y) = (0x - 3y, 3x + 0y) = 3(-y,x)$.

1.523C Se consideră în planul $P = \mathbf{R}^2$ un sistem ortogonal xOy şi dreapta
$D : x - 2y = 0$. Pentru orice punct $M \in P$ se notează cu M' proiecţia lui M
pe D. Să se determine matricea asociată aplicaţiei liniare $F : P \to P$,
$F(M) = M'$, relativ la baza canonică din $\mathbf{R}^2$. Fixăm $M(x_0, y_0)$ şi intersectăm dreapta $D : y = \frac{1}{2}x$ cu dreapta d prin M perpendiculară pe

D, $y - y_0 = -2(x - x_0)$ şi obţinem M' de coordonate $x' = \frac{2}{5}(2x_0 + y_0)$,
$y' = \frac{1}{5}(2x_0 + y_0)$ deci aplicaţia F este dată de $F(x,y) = \left(\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y, \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y\right)$
cu matricea $A_F = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.524C Perechea de numere $(p,q) \in \mathbf{R}^2$ astfel încât $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ a cărei
matrice asociată în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ verifică relaţia $f \circ f =$
$pf + qI$ ($I =$ aplicaţia canonică) este $(p,q) = (-2,7)$. Matriceal avem
$A_{f\circ f} = A_{pf+qI}$, $A_f^2 = pA_f + qI_2$ sau $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q & 2p \\ 2p & -3p+q \end{pmatrix} \Rightarrow$
$2p = -4$, $p = -2$, $p + q = 5$, $q = 7$. Altfel, se scrie $f(x,y) = (x + 2y, 2x -$
$3y)$, $(f \circ f)(x,y) = pf(x,y) + q(x,y)$ şi se obţine un sistem din ecuaţia
$(f \circ f)(x,y) = (5x - 4y, -4x + 13y) = p(x + 2y, 2x - 3y) + q(x,y)$.

Capitolul 2

Analiză matematică

2.1 Numere reale. Progresii. Siruri

2.525A Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $x_0 = 1$ se scrie $x_{n+1} - 1 = (x_n - 1)^2$ deci este şirul constant $1, 1, 1, 1, \ldots, x_n = 1$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$.
2.526A Şirul $x_n = \sin\frac{n\pi}{4}$ este periodic cu perioada 8 şi ia valorile $0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ admite cinci subşiruri convergente, este corect f).
2.527A Dacă progresia aritmetică are $a_1 = 23$, $a_n = 5$, $r = -2$, cât este n?. $a_n = a_1 + (n-1)r$, $5 = 23 + (n-1)(-2)$, $2(n-1) = 18$, $n = 10$.
2.528A Dacă progresia aritmetică are $a_1 = 3$, $a_n = 39$, $S_n = 210$, cât este r şi n? $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$, $210 = \frac{(3+39)n}{2}$, $n = 10$, $S_n = \frac{2a_1+(n-1)r}{2}n$, $210 = \frac{2\cdot 3+9r}{2}10 \Rightarrow r = 4$.
2.529A Idem ca în 2.528A, $a_1 \geq 0$, $a_n = 18$, $r = 2$, $S_n = 88$ se cere a_1 şi n. Înlocuim în formulele $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$, $S_n = \frac{2a_1+(n-1)r}{2}n$ şi obţinem sistemul $(a_1 + 18)n = 176$, $(a_1 + n - 1)n = 88$ cu soluţia $a_1 = 4$, $n = 8$.
2.530A Idem 2.529A, pentru $n \geq 5$, $a_2 + a_4 = 16$, $a_1 \cdot a_5 = 28$ să se determine a_1 şi r : $a_2 = a_1 + r$, $a_4 = a_1 + 3r$, $a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow a_1 + r + a_1 + 3r = 16$, $a_1(a_1 + 4r) = 28$, $2r = 8 - a_1$, $a_1^2 + 2a_1(8 - a_1) = 28 \Rightarrow a_1 = 2$, $r = 3$.
2.531A Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este o progresie geometrică şi $a_1 = 5$, $a_n = 1280$ şi $n = 9$ cât este suma S_n : $a_n = a_1 r^{n-1}$, $5 \cdot r^8 = 1280 \Rightarrow r = -2$. $S_n = a_1 \cdot \frac{r^n-1}{r-1}$, $S_9 = 855$.
2.532A Idem 2.531A, unde $a_n > 0$, $n = 3$, $a_3 - a_1 = 136$, $S_n = 221$ şi se cere a_n : $a_3 = a_1 r^2$, $S_3 = a_1\frac{r^3-1}{r-1}$, $a_3 - a_1 = a_1(r^2 - 1) = 136$, $S_3 = a_1(r^2 + r + 1)$, $\frac{a_1(r^2+r+1)}{a_1(r^2-1)} = \frac{221}{136} = \frac{13}{8} \Rightarrow r = 3, a_1 = 17, a_3 = 153$.
2.533A Idem 2.531A unde $a_1 + a_2 + a_3 = 26$, $a_5 + a_6 + a_7 = 2106$ şi se cere a_7 : $a_1 + a_1 r + a_1 r^2 = 26$, $a_1 r^4 + a_1 r^5 + a_2 r^6 = 2106$, $r^4(a_1 + a_1 r + a_1 r^2) = 2106$,

$r^4 \cdot 26 = 2106$, $r^4 = 81$, $r = 3$, $a_1 = 2$, $a_3 = 1458$.

2.534A Termenul general al şirului $\frac{2}{1\cdot3}, \frac{4}{3\cdot5}, \frac{6}{5\cdot7}, \frac{8}{7\cdot9} \dots$ definit pentru $n \geq 1$ este $\frac{2n}{2n^2-1} = \frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}$.

2.535A Termenul general al şirului $0, -\frac{1}{9}, \frac{4}{16}, -\frac{9}{25}, \frac{16}{36} \dots$ definit pentru $n \geq 1$ este $(-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$.

2.536A Termenul general al şirului $2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5} \dots$ definit pentru $n \geq 1$ este $\frac{n^2+1}{n}$.

2.537A Deoarece $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}$, $C_n^1 + C_n^2 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$ şirul $a_n = \frac{C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots}{C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots} = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} = 1$ este constant.

2.538A Şirul $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}$ este periodic de perioadă 4 şi ia trei valori $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots$ este deci format din trei subşiruri convergente la limite diferite.

2.539A Şirul $a_n = \min(n, 10)$ se scrie $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 10, 10, \ldots, 10, \ldots$ este deci convergent, $a_n \to 10$.

2.540A Se consideră mulţimea $A = \{\sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4\}$ şi se cere $\max A$ şi $\min A$. Reprezentând pe cercul trigonometric radianii $1, 2, 3, 4$ se observă că sunt apropiate ca valori (dar mai mici) de $\frac{\pi}{3}, 2\frac{\pi}{3}, 3\frac{\pi}{3}, 4\frac{\pi}{3}$ de unde rezultă că $\sin 2 > \sin 1 > 0$, $\sin 4 < 0 < \sin 3$, deci $\max A = \sin 2$, $\min A = \sin 4$.

2.541A Valorile lui $n \in \mathbf{N}$ pentru care $\left|\frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{10}$ sunt: $\frac{1}{2(2n+3)} > \frac{1}{10}$, $4n + 6 < 10$, $n < 1$ deci $n = 0$.

2.542A Să se calculeze $\max A$ pentru $A = \left\{\frac{n+1}{n}, n \in \mathbf{N}^*\right\}$. Pentru $n = 1$, avem evident $\max A = 2$, deoarece $\frac{n+1}{n} < 2$ pentru $n > 1$.

2.543A Dacă $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sunt erorile absolute în aproximările $\pi^2 \simeq 10$ şi respectiv $e^3 \simeq 20$, să se evalueze $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Deoarece $\varepsilon_1 = |\pi^2 - 10|$, $e_2 = |e^2 - 20|$ luând $\pi \simeq 3,1416$, $e \simeq 2,7183$, rezultă $\varepsilon_1 < \frac{1}{5}$, $\varepsilon_2 < \frac{1}{5}$.

2.544A Fie şirul recurent $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ cu $u_0 \neq 3$. Dacă $(u_n + \alpha)_n$ este o progresie geometrică, să se determine valoarea lui α. Condiţia dată se scrie $(u_n + \alpha)^2 = (u_{n-1} + \alpha)(u_{n+1} + \alpha)$, unde $u_{n-1} = 3(u_n - 2)$ iar $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ deci $u_n^2 + 2\alpha u_n = \alpha(u_{n-1} + u_{n+1}) + u_{n-1} \cdot u_{n+1}$ sau $u_n^2 + 2\alpha u_n = \alpha\left[3(u_n - 2) + \frac{1}{3}u_n + 2\right] + \left[3(u_n - 2)\left(\frac{1}{3}u_n + 2\right)\right]$. Rezultă $\left(\frac{\alpha}{3} + 1\right)u_n - (\alpha + 3) = 0$ deci $\alpha = -3$.

2.545A Şirurile $(a_n), (b_n), (c_n)$ definite prin $a_n = 2001 - 667n$, $b_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$ şi $c_n = (-1)^n + n$ verifică $a_{n+1} - a_n = -667$, $b_{n+1} = -\frac{1}{3}b_n$, (a_n) este progresie aritmetică, (b_n) este progresie geometrică iar (c_n) nu este progresie.

2.546A Termenul general al şirului definit de $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}$, $a_1 = 1$ se obţine scriind egalitatea $a_{k+1} = a_k - \frac{1}{k(k+1)}$ pentru $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ şi se adună. Rezultă $a_n = a_1 - \left(\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n}\right) = \frac{1}{n}$.

2.547A Mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 > 9\} = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ este formată din $A \cup \{-3, 3\}$ deci o infinitate.

2.548A Domeniul maxim de definiţie D al funcţiei $f(x) = \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}}$ este evident $D = [1, \infty)$ deoarece $f(x) = \sqrt{(\sqrt{x-1} - 3)^2} = |\sqrt{x-1} - 3|$.

2.549A $\max A$, dacă $A = \{\cos 1, \cos 2, \cos 3, \cos 4, \cos 5\}$ este $\cos 1$. Procedăm ca pentru 2.516A, figurând radianii 1,2,3,4,5 pe cercul trigonometric.

2.550A Un şir de numere reale este convergent dacă şi numai dacă orice subşir al său este convergent.

2.551A Valorile lui t pentru care şirul $f_n(t) = t^n e^{-t}$, $t \in [0, \infty)$, $n \in \mathbf{N}$ este o progresie aritmetică: $2f_n(t) = f_{n-1}(t) + f_{n+1}(t)$, $2t^n = t^{n-1} + t^{n+1}$; $t = 0$ şi $t = 1$. Se obţin progresiile $0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots \frac{1}{e}, \frac{1}{e}, \frac{1}{e}, \ldots, \frac{1}{e}, \ldots$.

2.552A Suma termenilor progresiei geometrice $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^{10}}$ este $S_{11} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{2^{11}-1}{2^{10}}$.

2.553A Fie $q \in \mathbf{R}$, $a_n = q^n$, $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Şirul a_n este convergent $\Leftrightarrow |q| < 1$ sau $q = 1$. $b_n = q\frac{1-q^n}{1-q}$ este convergent $\Leftrightarrow |q| < 1$.

2.554B Dacă (a_n) este o progresie aritmetică şi $a_1 + a_5 + a_9 = 51$ aflaţi $S = a_3 + a_4 + a_5 + a_8 \cdot a_1 + (a_1 + 4r) + (a_1 + 8r) = 51$, $a_1 + 4r = 17$ de unde $S = (a_1 + 2r) + (a_1 + 3r) + (a_1 + 4r) + (a_1 + 7r) = 4(a_1 + 4r) = 4 \cdot 17 = 68$.

2.555B Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ este o progresie aritmetică în care $a_{11} = 15$ calculaţi $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{21}$. $a_{11} = a_1 + 10r = 15$, $S = a_1 + (a_1 + r) + \ldots + (a_1 + 20r) = 21a_1 + r(1 + 2 + \ldots + 20) = 21(a_1 + 10r) = 315$.

2.556B Orice şir crescător şi mărginit este convergent.

2.557B Determinaţi mulţimea A a punctelor de acumulare ale mulţimii $B = \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4} + \frac{1}{n}\right), n \in \mathbf{N}\right\}$. Mulţimea $C = \left\{\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$ este un şir periodic, de perioada 8, cu cinci valori $A = \left\{-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right\}$ iar mulţimea B este un şir cu cinci puncte de acumulare (puncte limită) tocmai muţimea A.

2.558B Mulţimea $B = \left\{x_n = \cos\frac{n\pi}{6}, n \in \mathbf{N}\right\}$ este un şir periodic cu perioada 12 cu valorile succesive $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, deci $m = \min B = -1$, $M = \max B = 1$.

2.559B Fie (x_n) un şir fixat. x_n este convergent dacă şi numai dacă x_{2n}, x_{2n+1}, x_{3n} sunt convergente: $x_{2n} \cap x_{3n}$ şi $x_{2n+1} \cap x_{3n}$ au amândouă aceiaşi limită cu x_{3n} şi aceiaşi limită cu x_{2n} şi x_{2n+1}.

2.560B Dacă suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$

este cât o treime din suma următorilor n termeni, să se calculeze $\frac{S_{3n}}{S_n}$: $\frac{S_{3n}-S_n}{3} = S_n$, $S_{2n} = 4S_n$, $S_n = na_1 + r\frac{(n-1)n}{2}$, $S_{2n} = 2na_1 + r\frac{(2n-1)2n}{2} \Rightarrow$ $r = 2a_1$, $\frac{S_{3n}}{S_n} = \frac{6na_1+2a_1(3n-1)3n}{2na_1+2a_1(n-1)n} = 3\frac{3n^2}{n^2} = 9$.

2.561B Tripletele (x,y,z) care verifică sistemul $x+y+z=3$, $x^2+y^2+z^2=3$. Avem $2(x^2+y^2+z^2) = 2(x+y+z) \Rightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0$, $x=y=z=1$. Geometric, planul este tangent la sferă în punctul $(1,1,1)$, distanţa de la $(0,0,0)$ la plan este egală cu raza sferei $\sqrt{3}$. Altfel, eliminăm z între cele două egalităţi, $z = 3-(x+y)$, $x^2+y^2-3x-3y+3=0$, $y^2+y(x-3)+x^2-3x+3=0$. $y_{1,2} = \frac{3-x\pm\sqrt{(3-x)^2-4(x^2-3x+3)}}{2} = \frac{3-x\pm\sqrt{-3(x-1)^2}}{2}$ deci $x=1$, $y=1$, $z=1$.

2.562B Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ crescător $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, f crescătoare, g descrescătoare. Cum sunt $b_n = f(a_n)$, $c_n = g(a_n)$, $n \in \mathbf{N}$?. Funcţiile crescătoare păstrează inegalităţile, funcţiile descrescătoare inversează inegalităţile, deci $a_n \le a_{n+1} \Rightarrow$ $b_n = f(a_n) < f(a_{n+1}) = b_{n+1}$, $c_n = f(a_n)$, $f(a_{n+1}) = c_{n+1}$, deci b_n este crescător iar c_n descrescător.

2.563B Fie o progresie geometrică $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $a_5 = 61$, $a_{11} = 1647$; să se afle a_7: $a_5 = a_1r^4$, $a_{11} = a_1r^{10}$, $a_1r^4 = 61$, $a_1r^{10} = 1647$, $r^6 = \frac{1647}{61} = 27$, $r=\sqrt{3}$, $a_1 = \frac{61}{9}$, $a_7 = a_1r^6 = \frac{61}{9}\cdot 27 = 183$.

2.564B Domeniul de definiţie al expresiei $E(x) = (\ln x)^{\ln x}$ este $(1,\infty)\cup\{e^{-\frac{n}{m}}\}$, m impar, deci un şir şi un interval.

2.565B Punctele de acumulare al mulţimii $(\{(-1)^n\frac{n+1}{3n}\},\ n\in\mathbf{N})$ sunt $+\frac{1}{3}$ şi $-\frac{1}{3}$ deoarece $(-1)^n\frac{n+1}{3n} = (-1)^n\frac{1}{3} + \frac{(-1)^n}{3n} \to \pm\frac{1}{3}$.

2.566B Progresia aritmetică cu termeni pozitivi are primul termen pe a_1 şi raţia r pozitive şi din $a_{n+1} = a_n + r > a_n$ rezultă că (a_n) este un şir monoton crescător.

2.567C $x_n = \frac{\sin n!}{1+4^n} \to 0$ deoarece $0 \le \left|\frac{\sin n!}{1+4^n}\right| \le \frac{1}{1+4^n} \to 0$.

2.568C Fie $f:\bar{\mathbf{R}}\to[-1,1]$ definită prin $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $f(\infty)=1$, $f(-\infty) = -1$. Făcând graficul, se observă că f este bijectivă, este impară, crescătoare $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $f^{-1}(-1) = -\infty$, $f^{-1}(1) = +\infty$. Expresia lui f^{-1} se determină rezolvând în raport cu x pe $y = \frac{x}{1+x}$ $(x>0)$, $y = \frac{x}{1-x}$ $(x<0)$ şi schimbând rolul variabilei pe y cu x.

2.569C Fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $a_n\in\mathbf{R}$ un şir, $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ mărginită pe $\mathbf{R}$ şi $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ monotonă pe $\mathbf{R}$. Cum sunt şirurile $b_n = (f\circ g)(a_n)$, $c_n = (g\circ f)(a_n)$, $n\in\mathbf{N}$. Deoarece f este mărginită pe $\mathbf{R}$, $f(a_n)$ şi $f(g(a_n))$ sunt şiruri mărginite, deci şi $g(f(a_n))$ este mărginit.

2.570C Fie $l = \lim_{n\to\infty}\frac{[nx]}{n}$, $x\in(0,1)$. $nx-1 < [nx] \le nx$, $\frac{nx-1}{n} \le \frac{[nx]}{n} < \frac{nx}{n}$,

$x - \frac{1}{n} \le \frac{[nx]}{n} < x$ deci $\lim_{n\to\infty}\frac{[nx]}{n} = x$.

2.571C Aflaţi a_n dacă $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $n\in\mathbf{N}^*$. Ecuaţia caracteristică asociată şirului $r^2-5r+6=0$ are rădăcinile $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ deci $a_n = A2^n + B3^n$. Punem condiţiile $a_1 = 1$ şi $a_2 = 4$ şi rezultă $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{2}{3}$, $a_n = \frac{2}{3}3^n - \frac{1}{2}2^n = 18\,3^{n-3} - 2^{n-1}$.

2.572C Termenul general al şirului $2,4,7,11,\ldots$ care are proprietatea că diferenţele între termenii consecutivi formează o progresie aritmetică este $a_n = \frac{n^2+n+2}{2}$. Se verifică grila direct. Altfel, scriem condiţia dată:

$$2(a_{n+1}-a_n) = (a_n-a_{n-1}) + (a_{n+2}-a_{n+1}) \Rightarrow a_{n+2} - 3a_{n+1} + 3a_n - a_{n-1} = 0$$

şir recurent cu ecuaţia caracteristică $r^3-3r^2+3r-1=0$, $(r-1)^3=0$ care ne dă $a_n = A+Bn+Cn^2$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$. Rezultă $A = 1$, $B = C = \frac{1}{2}$ din sistemul $A+B+C=2$, $A+2B+4C=4$, $A+3B+9C=7$.

2.573C Marginea superioară M şi inferioară m a mulţimii $\{\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}|x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}\}$. Evident $M=+\infty$ (pentru $x\to-1$). Pentru m scriem condiţia ca ecuaţia $\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1} = y$ în x cu coeficienţi în y (y parametru) să aibă rădăcini reale deci $\Delta_y \ge 0: x^2(1-y) - x(3+2y) + 2 - y = 0$, $\Delta_y = (3+2y)^2 - 4(1-y)(2-y) \ge 0$, $\Delta_y = 1+24y \ge 0$, $y \ge -\frac{1}{24}$ deci $m = -\frac{1}{24}$. Altfel, facem graficul.

2.574C Fie şirurile $x_n = (a+(n-1)r)q^{n-1}$ şi $y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ $(a,r,q\in\mathbf{R}, q\neq 1)$.

Se cere y_n: $y_n = \sum_{k=1}^{n}(a+(k-1)r)q^{k-1} = a\cdot\sum_{k=1}^{n}q^{k-1} + r\cdot\sum_{k=1}^{n}(k-1)q^{k-1} =$ $a\frac{1-q^n}{1-q} + Sr$, $S = q+2q^2+3q^3+\ldots+(n-1)q^{n-1}$. $S - qS = q+q^2+q^3+q^4\ldots+$ $q^{n-1} - (n-1)q^n = q\frac{1-q^{n-1}}{1-q} - (n-1)q^n = \frac{q}{1-q}[1-q^{n-1}-(n-1)(q^{n-1}-q^n)] =$ $\frac{q}{1-q}[(n-1)q^n - nq^{n-1}]$ deci $y_n = a\frac{1-q^n}{1-q} + rq\frac{(n-1)q^n-nq^{n-1}+1}{(1-q)^2}$.

2.2 Limite

2.575C $a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots +$ $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$.

2.576A $A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2+3+\ldots+n)^2}{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}=1.$

2.577A Ştiind că $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)=\ln a\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{c}-\sqrt[n]{d}}=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(\sqrt[n]{a}-1)-n(\sqrt[n]{b}-1)}{n(\sqrt[n]{c}-1)-n(\sqrt[n]{d}-1)}=\dfrac{\ln a-\ln b}{\ln c-\ln d}=\dfrac{\ln\frac{a}{b}}{\ln\frac{c}{d}}$, $(a,b,c,d>0)$.

2.578A $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$ $\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1\right)$.

2.579A $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}-\sqrt{n}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n^3}}}}}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n^3}+\sqrt{\frac{1}{n^7}}}}}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

2.580A $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\arcsin\frac{1}{n^2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\arcsin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}-\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\right)=0.$

2.581A $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-7n+13}}{\sqrt[3]{-n^3+2n^2+2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot\sqrt{1-\frac{7}{n}+\frac{13}{n^2}}}{-n\cdot\left(\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}\right)}=-1.$

2.582A $\lim\limits_{n\to\infty}\log_8\left(\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt[3]{n^3-2}}{n+1}\right)^{\frac{\sqrt[3]{-n^3-n+1}}{n+\sqrt[4]{n^4-1}}}=$

$$=\log_8\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^3}}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{\sqrt[3]{-1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}}}=\log_8 2^{-1/2}=-\frac{1}{6}.$$

2.583A $\lim\limits_{n\uparrow3}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-3}}}=\lim\limits_{\substack{t\to0\\t>0}}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{3-t-3}}}=\dfrac{1}{1+2^{-\infty}}=1.$

2.584A $\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{1}{x^2-1}}=\lim\limits_{\substack{t\to0\\t>0}}e^{\frac{1}{(1\mp t)^2-1}}=e^{\mp\infty}=\begin{cases}l_s=0\\l_d=\infty\end{cases}$

2.585A $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3^n+5^n+7^n}{2^n+4^n+6^n+8^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n\cdot\frac{\frac{1}{7^n}+\left(\frac{3}{7}\right)^n+\left(\frac{5}{7}\right)^n+1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=0.$

2.586A $l=\lim\limits_{n\to\infty}(n+2-\sqrt{n^2+n+3})=2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-(n^2+n+3)}{n+\sqrt{n^2+n+3}}=$

$2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(-1-\frac{3}{n}\right)}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)}=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}.$

2.587A $l=\lim\limits_{n\to1}\dfrac{x^n+x^{n-1}-2}{x-1}=\lim\limits_{n\to1}\left(\dfrac{x^n-1}{x-1}-\dfrac{x^{n-1}-1}{x-1}\right)=n+(n-1)=$ $2n-1$, $\left(\lim\limits_{n\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=\lim\limits_{n\to1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+1)=n\right)$.

2.588A $l=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cos^2\dfrac{\pi x}{3}=0\cdot M=0$, (dacă $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ şi $|g(x)|<M\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$).

2.589A Pentru $x_n=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^n+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^n$ să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{n+1}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{n+1}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^n+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^n}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

2.590A Fie $f(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$, $a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}f(2\sqrt{k})$ şi $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$: $a=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}e^{-2k}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-2^{-2(n+1)}}{1-e^{-2}}=\frac{e^2}{e^2-1}\ \left(1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right).$$

2.591A $l=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}+1\right)}=\dfrac{1}{2}.$

2.592A $a_n=a+1-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=a+1-\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)\to a.$

2.593A Şirul recurent $a_{n+1}=\sqrt{3+2a_n}$, $a_0=\sqrt{3}$ este crescător şi mărginit: $a_0=\sqrt{3}<\sqrt{3+2\sqrt{3}}=a_1$, $a_{n-1}<a_n\Rightarrow2a_{n-1}<2a_n$, $3+2a_{n-1}<3+2a_n$, $a_n=\sqrt{3+2a_{n-1}}<\sqrt{3+2a_n}=a_{n+1}$; mărginirea: $a_{n+1}^2=3+2a_n$, $a_{n+1}=\frac{3}{a_{n+1}}+2\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{3}{a_0}+2=\sqrt{3}+2$. Deci a_n are limită, $l=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}^2=l^2=\lim\limits_{n\to\infty}(3+2a_n)=3+2l$ de unde $l=3$.

2.594A $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x}{x^2+x^2\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{1+\cos x}=\dfrac{1}{2}.$

2.595A Printre şirurile: a) $a_n=(-1)^n+\frac{1}{2}$; b) $a_n=(-1)^n+1$; c) $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$; d) $a_n=\frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{n}$; e) $a_n=\left(\frac{1}{2}+(-1)^n\right)^n$; f) $a_n=\frac{1-n}{n}$ numai c), $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$ verifică $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$, deoarece $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\frac{1}{n}\to0$.

2.596A $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-4x^2-3x+18}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2-(x^2-3x)-(x^2-9)}{x^3-3x^2-(x^2-9)-(3x-9)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}=\frac{4}{5}$.

2.597A $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\cdot e^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-\frac{n}{x}}\right]^{-x}\cdot e^{\frac{x}{2}}=e^{-x}\cdot e^{\frac{x}{2}}=e^{-\frac{x}{2}}$.

2.598A $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\sin nx}{x^2}=\lim\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin nx}{nx}n=n.$

2.599A Care din următoarele limite este cea corectă: a) $\lim\limits_{n\to-\infty}\sqrt{1+x^2}=\infty\neq-\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}x\cos x$ nu există, c) $\lim\limits_{n\to 2}\frac{(2x-2)-x}{2x-4}=\lim\limits_{n\to 2}\frac{x-2}{2(x-2)}=\frac{1}{2}$ deci adevărată; d) $\lim\limits_{n\downarrow 0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}=0\neq\infty$; e) $\lim\limits_{n\to 0}\frac{3x-5}{x+5}=-1\pm 3$;

2.600A $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}=0$ ($\lim\limits_{n\to x_0}f(x)g(x)=0$ dacă $\lim\limits_{n\to 0}f(x)=0$ şi $|g(x)|<M$).

2.601A Limita lui $x_n=\sqrt{n^2+n+1}-an$ este finită dacă $a=1$ ($\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-a\right)=\infty\cdot 0$ dacă $a=1$), deci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$.

2.602A Utilizând rezultatul $\lim\limits_{n\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{m}$ rezultă că $l=$

$$=\lim_{n\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\lim_{n\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\cdots\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{n!}$$

2.603B $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\frac{1+x}{x}\right)=\lim\limits_{0<\frac{1}{x}=t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2}$.

2.604B $l=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^2-3\pi^x}{e^x+2\pi^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\left(\frac{e}{\pi}\right)^x-3}{\left(\frac{e}{\pi}\right)^x+2}=-\frac{3}{2}\left(\left(\frac{e}{\pi}\right)^x\to 0,\frac{e}{\pi}<1\right)$.

2.605B $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax+x^2)}{\sqrt{x+b}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+(ax+x^2)]}{ax+x^2}\cdot\frac{ax+x^2}{x}\cdot\frac{(\sqrt{x+b}+1)x}{x+b-1}$

$=2$; utilizăm $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$ şi rezultă $b=1$, $2a=2$ deci $a=1$.

2.606B $l=\lim\limits_{x\to 0}2\frac{e^{\sin x}-e^{tgx}}{e^{\sin 2x}-e^{tg2x}}=\lim\limits_{x\to 0}2\frac{e^{tgx}(e^{\sin x-tgx}-1)}{\sin x-tgx}\cdot\frac{\sin x-tgx}{\sin 2x-tg2x}\cdot$

$\cdot\frac{\sin 2x-tg2x}{e^{tg2x}(e^{\sin x-tg2x}-1)}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 2x}\cdot\frac{1-\cos x}{1-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2 x}=\frac{1}{4}$.

2.607B $\lim\limits_{x\to\infty}n^\alpha(\sqrt[3]{n^3+bn+1}-n)=1\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty}n^\alpha\cdot\frac{bn+1}{\sqrt[3]{(n^3+bn+1)^2}+\sqrt[3]{(n^3+bn+1)n^3}+\sqrt[3]{(n^3)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{n^{\alpha+1}(b+\frac{1}{n})}{n^2\left(\sqrt{\left(1+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)^2}+\sqrt{1+\frac{b}{n}+\frac{1}{n^3}}+1\right)}=\frac{b}{3}=1,\text{ dacă}$$

$\alpha=1$, $b=3$, $\alpha+b=4$.

2.608B $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-a+a^2-a^3+\ldots+(-a)^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-(-a)^{n+1}}{1+a}\cdot\frac{1-b}{1-b^{n+1}}$; dacă $|a|<1$, $|b|<1$, $(-a)^{n+1}\to 0$, $b^{n+1}\to 0$ deci $l=\frac{1-b}{1+a}>1\Rightarrow a+b<0$.

2.609B Dacă $l=\lim\limits_{n\downarrow 0}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-\ln(e-x)}}$ atunci $l=\lim\limits_{n\downarrow 0}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{\frac{x}{\ln e-\ln(e-x)}}$

$=\lim\limits_{n\downarrow 0}\sqrt{\frac{\frac{x}{e-x}}{\ln\left(1+\frac{x}{e-x}\right)}\cdot(e-x)}=\sqrt{e}$ ($\lim\limits_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t}=1$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$).

2.610B $l=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\ln(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x)}{\ln x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)}{\ln x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}\cdot\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}=-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}=-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}=-1.$

2.611B $l=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}}{x}}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{\pi}{(2x+1)^2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\pi}{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{1}{(2x+1)^2}}=1.$$

2.612B $l=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x\sin^3x+1}{x^2\cos^2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2\sin^3x}{x}+\frac{1}{x^2}}{\cos^2x+\frac{1}{x^2}}$; deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\cos^2x$ nu există, l nu există.

2.613B $l=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{m\cos mx}{n\cos nx}=\frac{m}{n}\cdot\frac{(-10^m}{(-1)^n}=\frac{m}{n}(-1)^{m-n}$ (altfel: $l=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin m(\pi+t)}{\sin n(\pi+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\cdot\frac{\sin mt\cos m\pi}{\sin nt\cos nt}=\frac{m}{n}(-1)^{m-n}$)

2.614B $l=\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+2)\arcsin\frac{1}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{2x^2+1}\cdot\frac{\arcsin\frac{1}{2x^2-1}}{\frac{1}{2x^2+1}}=\frac{1}{2}$.

2.615B $0\leq\left|\lim\limits_{x\to\infty}(\sin x+\cos x)e^{-x^2}\right|\leq\sqrt{2}\lim\limits_{x\to\infty}\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|e^{-x^2}\leq$ $\leq\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$ (dacă $|g(x)|<M$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$).

2.616B $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)\dots(1+a^{2^n})=\frac{1}{1-a}\lim\limits_{n\to\infty}(1-a)(1+a)(1+a^2)\ldots=\frac{1}{1-a}\lim\limits_{n\to\infty}(1-a^2)(1+a^2)(1+a^4)\ldots=\frac{1}{1-a}\lim\limits_{n\to\infty}(1-$

$a^4)(1+a^4)\ldots = \frac{1}{1-a}\lim_{n\to\infty}(1-a^8)(1+a^8)\ldots = \frac{1}{1-a}\lim_{n\to\infty}(1-a^{2^{n-1}})(1+a^{2^{n-1}})(1+a^{2^n}) = \frac{1}{1-a}\lim_{n\to\infty}(1-a^{2^{n+1}}) = \frac{1}{1-a}$ deoarece $|a|<1$.

2.617B $l = \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^3}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}-2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\right)}{-\frac{2}{x^3}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x}}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}} = -\frac{1}{4}$. Altfel: $l = \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^3}\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{-2\cdot\sqrt{x^3}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right.}$

2.618B $l = \lim_{n\to\infty}n^3(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-n\sqrt{2}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3(\sqrt{n^4+1}-n^2)}{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+n\sqrt{2}} =$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(\sqrt{n^4+1}+n^2)}\cdot\frac{1}{(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+n\sqrt{2})} =$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+1)(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{8}$. Cu regula l'Hospital asociem funcţia $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}}-\sqrt{2}}{x^4}$, $x\to 0$.

2.619B $a_n = \frac{\alpha^n}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)\ldots(1+\alpha^n)}$; $\alpha = 1$, $a_n = \frac{1}{2^n}\to 0$; $0<\alpha<1 \Rightarrow 0 < a_n < \alpha^n \to 0$; $1<\alpha \Rightarrow 0 < a_n = \frac{\alpha^n}{1+\alpha^n}\cdot\frac{1}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)\ldots(1+\alpha^{n-1})} \le \frac{1}{2^{n-1}}\to 0$.

2.620B $l = \lim_{x\to -a}\frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[7]{x}+\sqrt[5]{a}+\sqrt[7]{a}}{x+a} = \lim_{x\to -a}\left(\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}+\frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}\right) = \frac{1}{5\sqrt[5]{a^4}}+\frac{1}{7\sqrt[7]{a^6}}$.
Altfel, notăm $a=-b$, $l = \lim_{x\to b}\left(\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{b}}{x-b}+\frac{\sqrt[7]{x}-\sqrt[7]{b}}{x-b}\right)$, $\lim_{x\to b}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{b}}{x-b} = \frac{1}{n\sqrt[n]{b^{n-1}}}$.

2.621B $l = \lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-\sqrt[5]{x+25}} = \lim_{x\to 7}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+20)^2}}}{\frac{1}{4\sqrt[4]{(x+9)^3}}-\frac{1}{5\sqrt[5]{(x+25)^4}}} = \frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{27}}{\frac{1}{32}-\frac{1}{80}}$.

Altfel: $l = \lim_{x\to 7}\frac{\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}-\frac{\sqrt[3]{x+20}-3}{x-7}}{\frac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}-\frac{\sqrt[5]{x+25}-2}{x-7}}$ şi notăm succesiv $t=\sqrt{x+2}$, $u=\sqrt[3]{x+20}$, $v=\sqrt[4]{x+9}$, $w=\sqrt[5]{x+25}$ şi obţinem spre exemplu $\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[5]{x+25}-2}{x-7} = \lim_{w\to 2}\frac{w-2}{w^5-2^5} = \lim_{w\to 2}\frac{1}{w^4+w^3\cdot 2+w^2\cdot 2^2+w\cdot 2^3+2^4} = \frac{1}{80}$.

2.622B $l = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{2x+1}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4\sqrt[4]{(x+1)^2}}-\frac{2}{3\sqrt{(2x+1)^2}}\right) = \frac{1}{4}-\frac{2}{3} = -\frac{5}{12}$. Altfel aplicăm $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x} = \frac{1}{n}$,
$l = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}-\frac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{2x}\cdot 2\right) = \frac{1}{4}-\frac{2}{3}$.

2.623B $l = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt[3]{n^3+1}) = \lim_{n\to\infty}[(\sqrt{n^2+n}-n)-(\sqrt[3]{n^3+1}-n)] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}-\frac{1}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+\sqrt[3]{(n^3+1)n^3}+\sqrt[3]{(n^3)^2}}\right] = \frac{1}{2}$; altfel $l = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x^3}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}\right) = \frac{1}{2}$.

2.624B $\lim_{n\to\infty}sin2x$ nu există: $\forall a\in[-1,1]\ \exists(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n = n\pi+\frac{1}{2}\arcsin a$, $\sin 2x_n = \sin(2n\pi+\arcsin a) = a\to a$, $x_n\to\infty$.

2.625B $l = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = 1$.

2.626B Dacă $(2+\sqrt{5})^n = x_n+y_n\sqrt{5}$ să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$: $(2-\sqrt{5})^n = x_n-y_n\sqrt{5} \Rightarrow x_n = \frac{1}{2}[(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n)]$, $y_n = \frac{1}{2}[(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n]$.
$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\right)^n}{1-\left(\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\right)^n} = 1$ (deoarece $\lim_{n\to\infty}a^n = 0$ dacă $|a|<1$).

2.627B Analog cu 2.616B cazul $a=\frac{1}{2}$: $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\right) = 2$.

2.628B Notăm $n^{\frac{1}{n}}-1 = x_n$, $n^{\frac{1}{n}} = 1+x_n$, $\frac{\ln x}{n} = \ln(1+x_n)$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^{\frac{1}{n}}-1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\ln(1+x_n)} = 1$.

2.629B $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n^2} \Rightarrow a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = \sqrt{3}$, $a_4 = \sqrt{4}$ şi prin inducţie $a_n = \sqrt{n} \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{1+(\sqrt{n})^2} = \sqrt{n+1}$.

2.630B Fie $f(x) = \ln(1+\frac{2}{x})$ şi $u_n = \sum_{k=1}^{n}f(k)$: atunci $\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{2}{k}) = \lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k} = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n+2}{n}\right) = \infty$.

2.631B $x_{n+1} = \frac{1}{3}(b+x_n+x_{n-1}^2)$, $x_1 = x_2 = 0$, $b\in[0,1]$ este evident mărginit de 1, este crescător (prin inducţie $x_{x+1}-x_n = \frac{1}{3}[(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}^2-x_{n-2}^2)]\ge 0$) deci convergent, $\lim x_n = l \Rightarrow l = \frac{1}{3}(b+l+l^2)$, $l = 1-\sqrt{1-b}$.

2.632B Dacă $a_n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n!}{(n+1)^n}$ atunci

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}=\frac{1}{e}$.

2.633B $\lim\limits_{n\to\frac{\pi}{4}}(2-\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\sin x-\cos x}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\operatorname{tg}x}{\sin x-\cos x}}=e^{-\lim\limits_{n\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}}=e^{-\sqrt{2}}$.

2.634B $\lim\limits_{n\to\infty}[a\ln(n+1)+b\ln(n+2)+c\ln(n+3)]=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[(a+b+c)\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^a\left(1+\frac{2}{n}\right)^b\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)^c\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(a+b+c)\ln n=0 \text{ dacă } a+b+c=0.$$

2.635B $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}\cdot\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sin x}\cdot\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$.

2.636B $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^4}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=-\frac{1}{2}$.

2.637B Fie şirul $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, $x_0>0$, $a>0$; avem $x_n^2-a=\frac{1}{4}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)^2-a=\frac{1}{4}\left(x_{n-1}-\frac{a}{x_{n-1}}\right)^2\geq 0$, deci $x_n>\sqrt{a}$ şi x_n este descrescător $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)-x_n=\frac{a-x_n^2}{2x_n}\leq 0$; notăm $l=\lim x_n$, $l=\frac{1}{2}\left(l+\frac{a}{l}\right)\Rightarrow l^2=a$ deci $l=\sqrt{a}$.

2.638B Utilizând $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot$

$$\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}=1.$$

2.639B $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$, $a,b,c>0$:

$$l=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}[n(\sqrt[n]{a}-1)+n(\sqrt[n]{b}-1)+n(\sqrt[n]{c}-1)]}=e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c}=$$

$e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}\,(\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ \lim\limits_{\substack{u\to 1\\ v\to\infty}}u^v=e^{\lim(u-1)v})$. Altfel, cu l'Hospital:

$$l=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}{x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{a^x+b^x+c^x}\cdot\frac{a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c}{3}}=e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c}=\sqrt[3]{abc}.$$

2.640B Şirul $\{x_n\}\subset\mathbb{N}^*$ definit prin $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}=n$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$ este şirul constant $x_n=1$: $n=1\Rightarrow x_1=1, n=2\Rightarrow\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=2$ deci $x_2=x_1=1$, $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}=3\Rightarrow x_3=1$ şi prin inducţie $x_n=1$.

2.641B Restrângeţi expresia $t=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$. De fapt t este limita şirului recurent $x_n=\sqrt{1+x_{n-1}}$, $x_1=\sqrt{1}$. Fie şirul mai general $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$, $x_1=\sqrt{a}$ care este crescător şi mărginit: $0<\sqrt{a}$, $a<a+\sqrt{a}$, $\sqrt{a}<\sqrt{a+\sqrt{a}}$, $a+\sqrt{a}<a+\sqrt{a+\sqrt{a}}$ etc. $x_{n-1}<x_n\Rightarrow a+x_{n-1}<a+x_n$ şi $x_n=\sqrt{a+a_{n-1}}<\sqrt{a+x_n}=x_{n+1}$; mărginirea: $x_{n+1}^2=a+x_n$, $x_{n+1}=\frac{a}{x_{n+1}}+\frac{x_n}{x_{n+1}}<\frac{a}{x_1}+1=\sqrt{a}+1$. Deci x_n are limită dată de egalitatea $l^2=a+l$, $l=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, $t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2.642C $x=\lim x_n$, $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^2}$; $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+n^2}<x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^2}<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+1}\Rightarrow\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n^2)}<x_n<\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)}$; $\frac{2}{6}\leq\lim x_n\leq\frac{2}{6}$, $x=\frac{1}{3}$.

2.643C $k=?\Rightarrow l=\lim\sqrt[n]{1^k+2^k+\ldots+n^k}$ să fie finită: $\sqrt[n]{n}<\sqrt[n]{1^k+2^k+\ldots+n^k}<\sqrt[n]{n\cdot n^k}$, dar $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^k=1$ şi deci $1=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\leq l\leq\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^{k+1}=1$, $l=1$, deci $k\in\mathbb{N}$.

2.644C Fie $x_n=(\sqrt{2}+1)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ şi $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$: $(\sqrt{2}-1)^n=a_n-b_n\sqrt{2}$, $a_n=\frac{1}{2}[(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n]$, $b_n=\frac{1}{2}[(\sqrt{2}+1)^n-(\sqrt{2}-1)^n]$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^n}{1-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^n}=1$, $(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}<1$, $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^n\to 0$ deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$ dacă $|a|<1)$.

2.645C Deoarece $(\cos x+sinx)=0$ pentru $x_n=n\pi+\frac{3\pi}{4}$,

$$l=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-3x}(\cos x+3\sin x)}{e^{-2x}(\cos x+\sin x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos x+3\sin x}{e^x(\cos x+\sin x)} \text{ nu există.}$$

2.646C $l=\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}=\lim\left|\frac{\sin x}{x}\right|^{\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{x-\sin x}}=1$ deoarece $\lim\limits_{t\to 0}=|t|^t=1$.

2.647C Singurul şir recurent, convergent la 0 este $x_n=\sqrt{x_{n-1}}$.

2.648C $l=\lim\limits_{x\to\infty}x(\pi-2\operatorname{arctg}x)=2\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)=$

$$=2\lim_{x\to\infty}x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)=2\lim_{x\to\infty}x\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}x)=2\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)}=2$$

$$(l=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=2).$$

2.649C Vezi 2.642B. $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{n^3+n^2}\le a_n\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{n^3+1}$, $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$.

2.650C $\lim_{x\to1}\frac{\sin|\ln x|}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sin|\ln x|}{|\ln x|}\cdot\frac{\ln|1+(x-1)|}{x-1}=\begin{cases}1, & x>1\\ -1, & x<1\end{cases}$.

2.651C $\lim_{n\to\infty}(n^2+n+2)^{\frac{1}{n^2+n+1}}=\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{m+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[m]{m}\cdot\sqrt[m]{1+\frac{1}{m}}=1$.

2.652C Fie şirul x_n definit de $\log_4(x_n+2)-\log_2 x_n=n$, $n\in\mathbf{N}$, $0<x_n<1$. $\log_2\frac{\sqrt{x_n+2}}{x_n}=\log_2 2^n$, $4^n x_n^2-x_n-2=0$, $x_n=\frac{1+\sqrt{1+8\cdot4^n}}{2\cdot4^n}\to0$.

2.653C Din inegalitatea $\left(\sum_{k=1}^{n}x_k y_k\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)$ luând $y_k=1$, $k=\overline{1,n}$, obţinem $\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2\le\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}$ deci $\lim\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}=0$ implică $\lim\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=0$.

2.654C Fie $l=\lim_{n\to\infty}n^k\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}-\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)(a^{\frac{1}{n}}-1)$; deoarece $\lim_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a$ şi $\lim_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}-\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{1-\frac{1}{n}-\left(1-\frac{1}{n+2}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n+2}}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2}{n(n+2)}=-1$ atunci pentru $k=3$, $l=-\ln a$ iar $k>3$, $l=\infty$.

2.655C $c=?$ astfel ca $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-2cx\ln(ex)+c^2}, & x\in(0,1)\\ c+3x, & x\in[1,2]\end{cases}$ să aibă limită în $x=1$. $\sqrt{x^2-2cx\ln ex+c^2}\to\sqrt{(c-1)^2}=|c-1|$ pentru $x\to1$, $x<1$, deci $|c-1|=3+c$, $c=-1$.

2.656C Dacă $f(x)=x^4-2x^3+x^2-2x$ şi g este câtul împărţirii lui f la x^2+1 să se calculeze $l=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[g(1)+g(2)+\ldots+g(n)]$. $f(x)=(x^2-2x)(x^2+1)$ deci $g(x)=x^2-2x$ şi $\sum_{k=1}^{n}g(k)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n(n+1)$. Rezultă $l=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$.

2.657C $l=\lim_{n\to\infty}\frac{kn^3+1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+\ldots+n)}{n^3+n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{kn^3+\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}}{n^3+n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{kn^3+\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)}{n^3+n^2+1}=k+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$, deci $k=1$.

2.558C $l=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x+\cos x}{1+x^2}=0$ deoarece $0<\left|\frac{\sin x+\cos x}{1+x^2}\right|\le\frac{\sqrt{2}}{1+x^2}\to0$.

2.659C Fie $l=\lim_{x\uparrow1}(1-x^2)f(x)-\lim_{x\downarrow1}f(x)$ unde $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$, $f_n(x)=\begin{cases}1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}, & x\le1\\ e^{n(1-x)}, & x>1\end{cases}$. Deoarece $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=(x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}+x^n)'=\left(x\cdot\frac{x^n-1}{x-1}\right)'=\frac{[(n+1)x^n-1](x-1)-x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$, $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ şi deci $\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)^2}{(x-1)^2}=1$, $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}e^{n(1-x)}=0$, $l=1-0=1$.

2.660C $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x}{1-x^2}=\begin{cases}-\infty, & x>1\\ +\infty, & x<1\end{cases}$ deci nu există; $\lim_{n\to\infty}g(x)=\lim_{n\to\infty}e^{-x}\sin x=0\cdot M=0$, $\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}e^x(2+\sin x)>\lim_{x\to\infty}e^x=\infty$.

2.661C $l=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a_1+a_2+\ldots+a_n)^{nx+a_1+a_2+\ldots+a_n}}{(x+a_1)^{x+a_1}\cdot(x+a_2)^{x+a_2}\ldots(x+a_n)^{x+a_n}}$; utilizăm formula $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x=e^a$ şi obţinem $l=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a_1+a_2+\ldots+a_n}{x+a_1}\right)^{x+a_1}\cdot\left(\frac{x+a_1+a_2+\ldots+a_n}{x+a_2}\right)^{x+a_2}\cdots\left(\frac{x+a_1+a_2+\ldots+a_n}{x+a_n}\right)^{x+a_n}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a_2+a_3+\ldots+a_n}{x+a_1}\right)^{x+a_1}\cdot\left(1+\frac{a_1+a_3+\ldots+a_n}{x+a_2}\right)^{x+a_2}\cdots\left(1+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{x+a_n}\right)^{x+a_n}=e^{a_2+a_3+\ldots+a_n}\cdot e^{a_1+a_3+\ldots+a_n}\cdots e^{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}=e^{(n-1)(a_1+a_2+\ldots+a_n)}$.

2.3 Funcţii continue

2.662A Mulţimea de definiţie a funcţiei $f(x)=\sqrt{\sin x-\cos x}$. $\sin x-\cos x=\sin x-\sin(\frac{\pi}{2}-x)=2\sin(x-\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$, $\sin(x-\frac{\pi}{4})>0$. $2k\pi\le x-\frac{\pi}{4}\le(2k+1)\pi$, $x\in\bigcup_{k\subset Z}\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right]$.

2.663A Funcţia $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}, & n\ne1\\ a, & x=1\end{cases}$ este continuă dacă $a=\frac{1}{n}$ deoarece $\lim_{x\to1}=\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}=\lim_{t\to1}\frac{t-1}{t^n-1}=\frac{1}{n}$ $(\sqrt[n]{x}=t\to1)$.

2.664A $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x>0\\ ax+b, & x\le0\end{cases}$ este continuă dacă $b=1$, $a\in\mathbf{R}$ deoarece $\lim_{\substack{x\to0\\x\le0}}f(x)=b=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=1$ şi $a\in\mathbf{R}$ oarecare.

2.665A Funcţia $f(x)=\begin{cases}2x^2+1, x<2\\ a, & x=2\\ 5x-1, & x>2\end{cases}$ este continuă dacă $a=9$ deoarece limitele laterale în $x=2$ există şi sunt egale cu 9.

2.666A Fie $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, & n\neq 2\\ a, & x=2\end{cases}$. Deoarece $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$, f este continuă dacă $a=4$.

2.667A Funcţia $f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to\mathbf{R}$, $\begin{cases}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}, & x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\setminus\{0\}\\ a, & x=0\end{cases}$ este continuă dacă $a=\sqrt2$. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{x^2}{2}}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{\sqrt2\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\sqrt2$.

2.668A Funcţia $f:[0,2]\to\mathbf{R}$, $\begin{cases}\frac{6\sin a(x-1)}{x-1}, & x\in[0,1)\\ 5x+a, & x\in[1,2]\end{cases}$ este continuă pentru $a=1$. $\lim\limits_{x\to1}\frac{6\sin a(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}6a\cdot\frac{\sin a(x-1)}{a(x-1)}=6a=5+a$, $a=1$.

2.669A Funcţia $f(x)=\begin{cases}2x+m, & x\le1\\ m^2x+2, & x>1\end{cases}$ este continuă pentru $m\in\{0,1\}$. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(2x+m)=2+m=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(m^2x+2)=m^2+2$, $m^2-m=0$.

2.670A $f(x)=\begin{cases}x+1,&x\le1\\3-ax^2,&x>1\end{cases}$ este continuă pentru $a=1$, evident.

2.671A $f(x)=\begin{cases}ax+3,&x<b\\4a,&x=b\\3x+a,&x>b\end{cases}$ este continuă pentru $a=1$, $b=1$ sau $a=b=3$; $\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}}(ax+3)=ab+3=\lim\limits_{\substack{x\to b\\x>b}}(3x+a)=3b+a=4a\Rightarrow a=b$, $a^2-4a+3=0$, $a=b=1$, $a=b=3$.

2.672A Mulţimea A a punctelor de continuitate ale funcţiei $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x+x^3 2^{nx}}{1+2^{nx}}$. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\x<0}}\frac{x+x^32^{nx}}{1+2^{nx}}=\frac{x+x^3\cdot0}{1+0}=x$, $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\x>0}}\frac{x+x^32^{nx}}{1+2^{nx}}=$
$=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\x>0}}\frac{xe^{-2nx}+x^3}{e^{-2nx}+1}=x^3$, $f(x)=\begin{cases}x & x\le0\\x^3 & x>0\end{cases}$ este continuă, $A=\mathbf{R}$.

2.673A $f(x)=\begin{cases}\frac{ax}{x^2-3x+2} & x\in(-\infty,0]\\ x\ln x & x\in(0,1]\\ e^{-x}-b & x\in(1,\infty)\end{cases}$ este continuă pentru $b=\frac1e$,

$a\in\mathbf{R}$. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{ax}{x^2-3x+2}=0=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln x=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln x}{\frac1x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(-x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}e^{-x}-b=\frac1e-b=0$.

2.674A Funcţia $f(x)=[x]\sin\pi x$ este continuă chiar şi în punctele $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, unde limitele laterale sunt egale şi egale cu 0, deci este continuă pe R, mulţimea punctelor de discontinuitate este $\emptyset$.

2.675A Funcţia $f:[0,\frac\pi2)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}a\sin x+\cos x, & x\in[0,\frac\pi4]\\ \operatorname{tg}x+a\operatorname{ctg}x, & x\in(\frac\pi4,\frac\pi2)\end{cases}$ este continuă în $\frac\pi4$ dacă $\frac{\sqrt2}{2}(1+a)=1+a$, deci $a=-1$.

2.676A $f(x)=\begin{cases}Ae^{2x}, & x\le0\\ \sin2x+B\cos3x, & x>0\end{cases}$ este continuă dacă $A=B$, $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=A=\lim\limits_{x\to+0}f(x)=B$.

2.677A $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac2x, & x\ne0\\ a, & x=0\end{cases}$ este continuă în $x=0$ doar dacă $a=0$ deoarece $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac2x=0$ ($\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$ dacă $f(x)\to0$ şi $|g(x)|<M$).

2.678A Fie $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin2x}{x}-a^2\frac{\ln(1+x)}{x}, & x\in(-1,0), a\in\mathbf{R}\\ \ln(1+x), & x\in[0,\infty)\end{cases}$ şi S suma valorilor lui a pentru care f este continuă. Se cere S.

$$\lim_{x\to-0}\left(2\frac{\sin2x}{2x}-a^2\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=2-a^2=\lim_{x\to+0}\ln(1+x)=0$$

deci $a=\pm\sqrt2$, $S=\sqrt2-\sqrt2=0$.

2.679A Fie $f(x)=\begin{cases}(1-e^{\frac{x}{1-x}})^{-1}, & x\ne0,x\ne1\\ 1, & x=1\\ 0, & x=0\end{cases}$; se cer punctele de discontinuitate. $\lim\limits_{x\to-0}(1-e^{\frac{x}{1-x}})^{-1}=+\infty$ deoarece $1-e^{\frac{x}{1-x}}\to+0$ iar $\lim\limits_{x\to+0}(1-e^{\frac{x}{1-x}})=-\infty$ deoarece $1-e^{\frac{x}{1-x}}\to-0$ deci $x=0$ este punct de discontinuitate de speţa a II-a. Dacă $1-x>0$, $x<1$, $\lim\limits_{x\to1}(1-e^{\frac{x}{1-x}})=1-e^{\infty}=-\infty$ iar pentru $1-x<0$, $x>1$, $\lim\limits_{x\to1}(1-e^{\frac{x}{1-x}})=1-e^{-\infty}=1$ deci $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=1$, $x=1$ este de speţa întâi.

2.680B Ecuaţia $(x+1)2^{x+1}=1$ are cel puţin o rădăcină reală în $[-1,0]$. Fie $f(x)=(x+1)2^{x+1}-1$. Conform cu Darboux, deoarece $f(-1)=-1$, $f(0)=1$, $f(x)$ se anulează cel puţin într-un punct din $[-1,0]$.

2.681B Aflaţi punctele de discontinuitate ale funcţiei $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{x^{2n+2}}{x^{2n}+2^{2n}}}$

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{x^2}{1+(\frac{2}{x})^{2n}}} = \begin{cases} |x|, & |x| > 2 \\ 0, & |x| < 2 \\ \sqrt{2}, & |x| = 2 \end{cases}$ deci punctele ± 2 sunt discontinuităţi de prima speţă.

2.682B Punctele de discontinuitate ale funcţiei $f : [0,2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - [x^2]$. Se observă că limitele la dreapta în punctele $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ sunt 0 iar la stânga sunt 1 deci discontinuităţi de speţa întâi (se poate folosi şi graficul).

2.683B Punctele de discontinuitate ale funcţiei $f : [0,10] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$. Se observă (eventual folosind graficul) că limitele la dreapta în punctele 1,4,9 sunt 0 iar la stânga sunt 1 deci 1,4,9 sunt discontinuităţi.

2.684B $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ are în 0 discontinuitate de speţa unu.

2.685B $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1+e^{nx}} = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$ este continuă.

2.686B Care din următoarele două funcţii $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ pot fi prelungite prin continuitate în $x = 0$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ putem da valoarea 1 în 0, prelungita lui f este $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. Dar $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ deci nu poate fi prelungită în 0, prin continuitate.

2.687B Funcţia $f : [1,3] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2ax + a^2}, & x \in [1,2) \\ ax + 3, & x \in [2,3] \end{cases}$ este continuă pentru $a = -\frac{1}{3}$ deoarece condiţia $|2 - a| = 2a + 3$ este verificată pentru $a = -\frac{1}{3}$.

2.688B Funcţia $f(x) = \begin{cases} x^m \cos\frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este continuă pentru $m > 0$ deoarece $\lim\limits_{x\to 0} x^m \cos x = 0$ dacă $m > 0$ $(0 \leq |x^m \cos x| \leq |x^m| \to 0)$.

2.689B Fie $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin^{2n} x$ şi k numărul de puncte de discontinuitate ale funcţiei f în intervalul $[-\pi, \pi]$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^{2n} x = 0$ pentru $(\forall) x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ şi $f(k\pi \pm \frac{\pi}{2}) = 1$, punctele $x = \pm\frac{\pi}{2}$ sunt de discontinuitate deci $k = 2$.

2.690B Funcţia $f : (-1,1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-x}} \operatorname{arctg} \sqrt{-x}, & x \in (-1,0) \\ k, & x = 0 \\ \frac{a}{\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, & x \in (0,1) \end{cases}$

$a, k \in \mathbf{R}$ este continuă pentru $k = 1$, $a = \frac{1}{2}$: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\operatorname{arctg} t}{t} = 1$, $\lim\limits_{t\to 0} \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\frac{1}{t}} = e^{\lim\limits_{t\to 0} \left(\frac{1+t}{1-t} - 1\right)\frac{1}{t}} = e^{\lim\limits_{t\to 0} \frac{2}{1-t}} = e^2$, $a \ln e^2 = 2a = 1$, $a = \frac{1}{2}$.

2.691B Pentru funcţia $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2, & x \in Q \\ 3(x+1), & x \in \mathbf{R} \setminus Q \end{cases}$ mulţimea punctelor de discontinuitate este $\mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{3}, -1, \sqrt{3}\}$. Există şiruri $(x_n)_n \subset Q$ şi $(y_n)_n \subset \mathbf{R} \setminus Q$, $x_n \to x$, $y_n \to x$, $x \in \mathbf{R}$ fixat. Atunci $f(x_n) = x_n^3 + x_n^2 \to x^3 + x^2$ iar $f(y_n) = 3(y_n + 1) \to 3(x+1)$; dar $x^3 + x^2 = 3(x+1)$ numai pentru valorile $x = -\sqrt{3}$, $x = -1$, $x = \sqrt{3}$ deci f este continuă în $\{-\sqrt{3}, -1, \sqrt{3}\}$.

2.692B Să se determine m şi n astfel încât funcţia $f(x) = \arcsin \frac{x^2+mx+n}{x^2+1}$ să fie continuă pe $\mathbf{R}$. Deci trebuie să fie definită pe toată dreapta $\mathbf{R}$ şi $-1 \leq \frac{x^2+mx+n}{x^2+1} \leq 1$, f fiind compunerea a două funcţii continue, funcţia raţională $x \to \frac{x^2+mx+n}{x^2+1}$ şi $x \to \arcsin x$. Inegalitatea dublă ne dă: $0 \leq 2x^2 + mx + n + 1$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ deci $\Delta = m^2 - 8(n+1) \leq 0$ şi $mx + n - 1 \leq 0$ $\forall x$, deci $m = 0$ şi $n \leq 1$. Rezultă în final $m = 0$ şi $n \in [-1, 1]$.

2.693B Fie $f(x) = \sin x + \cos x$ şi l suma lungimilor intervalelor componente ale mulţimii $A = \{x \in [0, 2\pi] | f(x) \geq 0\}$. Se cere l. $f(x) = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ rezultă $-\frac{\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{2}$ deci $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ şi $l = \pi$.

2.694B $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n}$ are un singur punct de discontinuitate $x = 1$ deoarece $f(x) = \begin{cases} 0, & x > 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} \infty, & x > 1 \\ 1, & x = 1 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$

2.695B Funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ continuă care verifică condiţia $f(x^2) = f(x)$, $(\forall) x \geq 0$ este o constantă. $x \neq 0$, $f(x) = f(\sqrt{x}) = f(\sqrt[4]{x}) = \ldots = f(\sqrt[2^{n-1}]{x}) = \ldots = f(\sqrt[2^n]{x})$ este un şir constant, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\sqrt[2^n]{x}) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{x}\right) = f(1)$. Dacă $x = 0$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0 \Rightarrow f(x_n) = f(1) \to f(0)$ deci $f(0) = f(1)$.

2.696B Funcţia $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}+b, & x<0\\ a, & x=0\\ x^x, & x>0\end{cases}$ este continuă în $x=0 \Leftrightarrow b=0$, $a=1$: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+b\right)=b+1$, $\lim\limits_{x\to 0}x^x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$ sau $\lim\limits_{x\to 0}x^x=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^0$ rezultă $b+1=a=1$ deci $b=0$, $a=1$.

2.697C $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\in Q\\ x+3, & x\in \mathbf{R}\setminus Q\end{cases}$ este continuă în două puncte $x=-1$ şi $x=2$. Fie $(x_n)_n\subset Q$ şi $(y_n)_n\subset \mathbf{R}\setminus Q$, $x_n\to x$, $y_n\to x$, $x\in\mathbf{R}$ fixat. $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^2+1)=x^2+1$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(y_n+3)=x+3$; dacă $x\neq -1$, $x\neq 2$, $x^2+1\neq x+3$ deci x este de discontinuitate. Dacă $x^2+1=x+3$ deci în $x=-1$ sau $x=2$, f este continuă.

2.698C $f(x)=\begin{cases}-x^2+2, & x\in Q\\ x^3, & x\in\mathbf{R}\setminus Q\end{cases}$ este continuă numai în 1 (2.697C).

2.699C $f(x)=[x]+2$ nu are proprietatea lui Darboux deoarece ia numai valori naturale $3,4,5,\ldots,n,\ldots$.

2.700C $f(x)=\begin{cases}x, & x\in Q\\ x^3, & x\in\mathbf{R}\setminus Q\end{cases}$ este continuă numai într-un număr finit de puncte $x=0$, $x=\pm 1$ (unde $x=x^3$, vezi 2.697C).

2.701C $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ are proprietatea lui Darboux deoarece admite primitive (vezi [4], pag. 14).

2.702C Fie $f:[0,1]\to[0,1]$ o funcţie continuă. Atunci există un $x_0\in[0,1]$ astfel încât $f(x_0)=x_0$. Într-adevăr, notând cu $g(x)=f(x)-x$, observăm că $g(0)=f(0)\geq 0$ iar $g(1)=f(1)-1\leq 0$ dar g fiind continuă, există un punct x_0, astfel ca $g(x_0)=0$ adică $f(x_0)=x_0$.

2.703C Repetă problema 2.697C.

2.704C Determinaţi funcţiile continue $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ astfel ca $f(x)=f(2x+1)$. Fie $x\in\mathbf{R}$ arbitrar. Rezultă că $f(x)=f\left(\frac{x+1}{2}-1\right)=f\left(\frac{\left(\frac{x+1}{2}-1\right)+1}{2}-1\right)=f\left(\frac{x+1}{2^2}-1\right)=\ldots=f\left(\frac{x+1}{2^n}-1\right)\ldots$ deci $f(x)=\lim f\left(\frac{x+1}{2^n}-1\right)=f(-1)$ adică f este constantă.

2.705C Fie $0<a<1$ şi $b>0$. Atunci ecuaţia $x=a\sin x+b$ are cel puţin o soluţie în $(0,a+b)$, deoarece prima bisectoare $y=x$ intrsectează cel puţin o dată sinusoida $y=a\sin x$ deplasată pe ordonată cu $b>0$, $y=a\sin x+b$, intersecţia are loc pentru $x<a+b$, deoarece $a+b>a\sin(a+b)+b$.

2.706C Să se afle tipul de funcţie elementară $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ continuă pentru care $f(0)=\frac{1}{2}$, $f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=0$: a) exponenţială; b) polinom de gradul întâi; c) polinom de gradul doi; d) logaritmică e) constantă; f) $f(x)=x^n$, $n\in\mathbf{N}^*$. Verificând grila observăm că $f(x)=2x+\frac{1}{2}$, deci b).

2.707C Să se determine numărul de soluţii ale ecuaţiei $x^3+4x-6=0$ în intervalul [1,2]. Deoarece $f(1)=-1<0$, $f(2)=10>0$ iar derivata $f'(x)=3x^2+4>0$, funcţia $f(x)=x^3+4x-6$ este strict crescătoare şi are o singură rădăcină în [1,2].

2.708C Funcţiile $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ şi $g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ \pi, & x=0\end{cases}$ sunt discontinue în origine şi totuşi $f\circ g$ continuă în 0:

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}\frac{\sin g(x)}{g(x)}, & g(x)\neq 0, g(x)=\pi, x=0\\ 0, & g(x)=0, x\neq 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{\sin\pi}{\pi}, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}=0.$$

2.709C Funcţia $f:(0,1)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\in Q\cap(0,1)\\ 1-x, & x\in(\mathbf{R}\setminus Q)\cap(0,1)\end{cases}$ nu este continuă şi nu are proprietatea lui Darboux. f are un singur punct de continuitate $x=\frac{1}{2}$ (soluţia ecuaţiei $x=1-x$) nu are proprietatea lui Darboux deoarece valorile $y\in(0,\frac{1}{2})\cap\mathbf{R}\setminus Q$ nu sunt luate pentru $x\in(0,\frac{1}{2})\cap(\mathbf{R}\setminus Q)$ ci pentru $x\in(\frac{1}{2},1)\cap(\mathbf{R}\setminus Q)$. Analog pentru $(\frac{1}{2},1)$.

2.710C Se dau funcţiile $f:(0,\frac{\pi}{2})\to(0,2)$, $g:(0,2)\to\mathbf{R}$ şi $h:(0,\frac{\pi}{2})\to\mathbf{R}$ astfel încât $g(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x, & x\in(0,1]\\ \frac{x+1}{3}, & x\in(1,2)\end{cases}$, $h(x)=\cos x$, $h=g\circ f$. Care este mulţimea $A=\{x\in(0,\frac{\pi}{2})|f$ este discontinuă în $x\}$. Deoarece g^{-1} şi h sunt continue, $f=g^{-1}\circ h$ este continuă şi deci $A=\emptyset$. Dăm şi o verificare directă, în amănunt. Calculăm inversa lui g. $y=\begin{cases}\frac{2}{3}x, & x\in(0,1], y\in(0,\frac{2}{3}]\\ \frac{x+1}{3}, & x\in(1,2), y\in(\frac{2}{3},1)\end{cases}$ deci $g:(0,2)\to(0,1)$, $g^{-1}:(0,1)\to(0,2)$, $y=g^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x, & x\in(0,\frac{2}{3}]\\ 3x-1, & x\in(\frac{2}{3},1)\end{cases}$ (deoarece $x=\begin{cases}\frac{3}{2}y, & y\in(0,\frac{2}{3}]\\ 3y-1 & y\in(\frac{2}{3},1)\end{cases}$ şi schimbăm y cu x). Avem $f=g^{-1}\circ h$, $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}\cos x, & 0<\cos x\leq\frac{2}{3}, x\in[\arccos\frac{2}{3},\frac{\pi}{2})\\ 3\cos x-1, & \frac{2}{3}<\cos x<1, x\in(0,\arccos\frac{2}{3})\end{cases}$. Se observă că f este continuă în $x=\arccos\frac{2}{3}$ şi $f(\arccos\frac{2}{3})=1$.

2.711C $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x, & x \in Q \\ x^2 - 2, & x \in \mathbf{R} \setminus Q \end{cases}$ este continuă numai în punctele $x \in \{-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\}$ soluţii ale ecuaţiei $x^3 - 2x = x^2 - 2$ (vezi 2.697C).

2.712C Pentru ce valori ale lui $a, b \in \mathbf{R}$ funcţia $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{a}{x^2}, & x < 0 \\ ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$ este continuă: $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to +0} f(x) = b$, deci $b = 0$, $a \in \mathbf{R}$.

2.713C Funcţia $f : [0, 2] \to [0, 1]$, definită de $f(x) = x - [x]$ nu are proprietatea lui Darboux cu toate că $\mathrm{Im} f$ este un interval. Într-adevăr observăm că $f([\frac{7}{8}, \frac{9}{8}]) = [0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{7}{8}, 1]$ deci nu are proprietatea lui Darboux, dar $f([0, 2]) = [0, 1)$.

2.4 Derivabilitate

2.714B Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât $f : (-\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln(1 + 2x), & -\frac{1}{2} < x \leq 0 \\ \alpha x, & x > 0 \end{cases}$ să fie derivabilă în $x = 0$. f este continuă în 0 pentru $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ dar este derivabilă pentru $\alpha = 2$ deoarece $f'(x) = \frac{2}{1+2x}$, $f'(-0) = 2 = \alpha = f'(+0)$.

2.715A Care derivată este corectă? a) $(e^{x^2})' = (1 + x)e^{x^2}$; b) $\left(\frac{1}{1+|x|}\right)' = \frac{-1}{(1+|x|})^2$; c) $(\ln(1 + e^x))^2 = \frac{1}{1+e^{-x}}$; d) $(\sin x)' = \sin x$; e) $(\sqrt{x})' = 2x$; f) $(1)' = 1$. Corectă este c): $(\ln(1 + e^x))' = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

2.716A Se cere $\lambda = f'(0)$, unde $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ $\cdot$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) - x}{x^2} = 0$ (sau $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{2x} =$ 0.

2.717A Valoarea lui $a \in \mathbf{R}$ pentru care funcţia $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi) \\ ax + \pi, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$ este derivabilă, este -1 : $f(\pi - 0) = 0 = a\pi + \pi = f(\pi + 0)$, $f'(\pi - 0) = \cos \pi = -1 = f'(\pi + 0) = a$.

2.718A Punctele în care $f(x) = \sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt[3]{(x - 1)^2}$ nu este derivabilă sunt ± 1: $f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right)$ nu există în $x = \pm 1$.

2.719A Cât este $f^V(0)$ dacă $f(x) = x^4 e^{2x} \cdot (uv)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$, $(e^{2x} \cdot x^4)^V = (e^{2x})^V \cdot x^4 + 5(e^{2x})^{IV} \cdot 4x^3 + 10(e^{2x})''' \cdot 12x^2 + 10(e^{2x})'' \cdot 24x + 5(e^{2x})' \cdot 24 \Rightarrow f^V(0) = 240 = 10 \cdot 4! = 2 \cdot 5!$.

2.720A Derivata funcţiei $f(x) = x^x - a^x - x^a$, $x > 0$, $a > 0$ în punctul $x = a$: $f'(x) = x^x(1 + \ln x) - a^x \ln a - ax^{a-1}$, $f'(a) = a^a(1 + \ln a) - a^a \ln a - a^a = 0$.

2.721A Derivata laterală la dreapta $f_d'(0)$ a funcţiei $f : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbf{R}$, $f(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$; $f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \cdot \left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \ln \sin x\right] + (\cos x)^{\sin x}\left[-\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x \ln \cos x\right]$; $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^{\cos x - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \left[(\sin x)^{\sin x}\right]^{\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}} = 1^0 = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \sin x \ln \sin x = \lim\limits_{x \to 0} \ln(\sin x)^{\sin x} = \ln 1 = 0$ deci $f_d'(0) = 1$. A doua limită este evident 0.

2.722A Să se determine punctele în care $f : (-2\pi, 2\pi) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + \sqrt[3]{\sin x}$ nu este derivabilă, dar admite derivată: $f'(x) = 1 + \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{(\sin x)^2}}$, deci nu este derivabilă în $-\pi, 0, \pi$, dar admite derivată infinită ($+\infty$ în 0 şi $-\infty$ în $\pm\pi$).

2.723A Derivatele laterale $f_s'(\pi)$, $f_d'(\pi)$ ale funcţiei $f(x) = |\cos x|$ sunt egale cu 0, deoarece pentru $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $|\cos x| = -\cos x$, $f'(\pi) = f_s'(\pi) = f_d'(\pi) = \sin \pi = 0$.

2.724A Care din funcţiile $f(x) = |x|$, $g(x) = x|x|$ sunt derivabile în origine şi care nu: $f_s'(0) = -1$, $f_d'(0) = 1$, $g_s'(x)|_{x=0} = (-x^2)'_{x=0} = -2x|_{x=0} = 0 = g_d'(0)$ deci f nu este derivabilă iar g este derivabilă în 0.

2.725A Derivata funcţiei $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^5 + \ln(x + 1)$ în $x = 1$: $f'(x) = \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^5 \cdot 5 \cdot \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^4 \cdot \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+1}$, $f'(1) = \frac{1}{12}$.

2.726A Derivata funcţiei $f : (-1, 1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \frac{1-x}{1+x}$ în punctul $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $f'(x) = 2\frac{1 + \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{2x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\frac{\pi}{4}}{\sqrt{\frac{1}{8}}} = \pi$.

2.727A Pentru orice $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ valoarea expresiei $E(x) = (x^2 - 1)f''(x) + xf'(x)$, unde $f(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^\alpha$ este $E(x) = a^2 f(x)$. Avem $f'(x) = \alpha(x + \sqrt{x^2 - 1})^{\alpha - 1}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \alpha\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^\alpha}{\sqrt{x^2-1}}$, $f'(x) = \sqrt{x^2 - 1} = \alpha f(x) \Rightarrow f''(x)\sqrt{x^2 - 1} + f'(x) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \alpha f'(x)$ sau $(x^2 - 1)f''(x) + xf'(x) = \alpha\sqrt{x^2 - 1} f'(x) = \alpha^2 f(x)$.

2.728A Funcţia $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + ax + 1}$, $a \in \mathbf{R}$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{1}{3}\frac{2x+a}{\sqrt[3]{(x^2+ax+1)^2}}$ dacă $x^2 + ax + 1 = 0$ are rădăcini complexe deci $\Delta < 0$, $a^2 - 4 < 0$, $a \in (-2, 2)$.

2.729A Funcţia $f(x)=\begin{cases} x^4+ax+2, & x<0 \\ b+\ln(1+x^4), & x\ge 0\end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$ dacă $a=0$, $b=2$: $f_s(0)=f(-0)=2=b=f(+0)=f_d(0)$, $f_s'(0)=(4x^3+a)_{x=0}=a=f_d'(0)=\frac{4x^3}{1+x^4}\Big|_{x=0}=0$.

2.730A Valorile lui a şi b pentru care funcţia $f(x)=\begin{cases}2x^2+b, & x\le 2\\ 2ax^3+11a, & x>2\end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$ sunt $a=\frac{1}{3}$, $b=1$: $f_s(2)=8+b=f_d(2)=27a$, $f_s'(2)=4x|_{x=2}=8=f_d'(2)=24a\Rightarrow a=\frac{1}{3}$, $b=1$.

2.731A Dacă $f(x)=2^{|x+1|}$ cât este $f'(0)$: $|x+1|=(x+1)$ dacă $x>-1\Rightarrow f'(0)=(2^{x+1})'|_{x=0}=2\ln 2$

2.732A Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este derivabilă şi impară atunci f' este pară: $f(x)=-f(-x)$, $f'(x)=-f'(-x)(-1)=f'(-x)$.

2.733A Dacă u,v sunt derivabile regula $(a^u)'=a^u u'$ este greşită celelalte sunt corecte.

2.734A Cât este a pentru care $f:[0,2]$, $f(x)=\min\left\{x,\frac{2}{1+x^2}\right\}$ $f'(a)$ nu există, $a\in[0,2]$: $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1]\\ \frac{2}{1+x^2}, & x\in(1,2]\end{cases}$ deci pentru $a=1$, $f'(a)$ nu există, $f_s'(1)=1$, $f_d'(1)=-1$.

2.735A Derivata funcţiei $f(x)=x^{x^2+1}$, $x>0$: $f'(x)=x^{x^2+1}((x^2+1)\ln x)'=x^{x^2+1}\left(\frac{x^2+1}{x}+2x\ln x\right)=(x^2+1)x^{x^2}+2x^{x^2+2}\cdot\ln x$.

2.736A $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+l, & x\le2\\ mx+3l-6, & x>2\end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$ dacă $m=l=1\Rightarrow f_s'(2)=1=m=f_d'(2)$, $f_s(2)=4-6+l=f_d(2)=2m+3l-6\Rightarrow m+l=2$, $m=1$, $l=1$.

2.737A $f(x)=\begin{cases}x^4+ax+2, & x<0\\ b+\ln(1+x^2), & x\ge0\end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$ dacă $a=0$ şi $b=2$. Rezultă din egalităţile $f(0)=2=b$, $f'(0)=0=a$.

2.738A $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<1\\ 2x, & x\ge1\end{cases}$ şi $l=f'(1)$; atunci $l=2x|_{x=1}=2$.

2.739A Derivatele funcţiilor $f(x)=\sin(\arccos x)+\cos(\arcsin x)$, $x\in(-1,1)$, $g(x)=\arcsin(\sin x)+\arccos(\sin x)$. Avem $\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}+\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}=2\sqrt{1-x^2}$ şi $g(x)=\frac{\pi}{2}$, $g'(x)=0$, $f'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$ (altfel $f'(x)=-\frac{\cos(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\sin(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$).

2.740B Cât este $n\in\mathbf{N}^*$ dacă $f^{(n)}(0)=-72$ şi $f(x)=x^2e^{-x}$. $f^{(n)}(x)=(e^{-x})^{(n)}x^2+n(e^{-x})^{(n-1)}2x+\frac{n(n-1)}{2!}(e^{-x})^{(n-2)}2\Rightarrow f^{(n)}(0)=\frac{n(n-1)}{2!}(-1)^{n-2}2=$

-72, deci $n=9$.

2.741B Dacă $f(x)=\frac{\sin(\alpha\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$, valoarea expresiei $E=(x^2-1)f''(x)+3xf'(x)-(\alpha^2-1)f(x)$ este 0. Se derivează $f(x)$, $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\sin(\alpha\arccos x)-\frac{\alpha\cos(\alpha\arccos x)}{1-x^2}$, deci $(1-x^2)f'(x)=xf(x)-\alpha\cos(\alpha\arccos x)$ şi derivând obţinem $(1-x^2)f''(x)-2xf'(x)=xf'(x)+f(x)-\alpha^2f(x)$.

2.742B Să se calculeze $(f^{-1})'(3)$ dacă $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\le2\\ -x^2-2x, & x>0\end{cases}$. Ecuaţia $x^2-2x=3$, $x<0$ are rădăcina $x_0=-1$, iar ecuaţia $-x^2-2x=3$, $x>0$ are rădăcini complexe deci $f(-1)=3$, $f^{-1}(3)=-1$. $(f^{-1})'(3)=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{2x-2}|_{x=-1}=-\frac{1}{4}$.

2.743B Punctele de derivabilitate ale lui $f(x)=\begin{cases}x\cdot\cos\frac{1}{x}, & x\ne0\\ 0, & x=0\end{cases}$ sunt $\mathbf{R}\setminus\{0\}$: $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$ nu există.

2.744B Cât este $f'(3)$ dacă $f:(1,\infty)$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x+x^2+\ldots+x^n}{x^n}$. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-1}{(x-1)x^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x-(\frac{1}{x})^n}{x-1}=\frac{x}{x-1}$, $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$, $f'(3)=-\frac{1}{4}$.

2.745B Să se determine a astfel încât funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x^2+x}}, & x\in(-1,0)\\ a, & x\notin(-1,0)\end{cases}$ să fie derivabilă; dacă $x\in(-1,0)$, $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=e^{-\infty}=0$ deci din continuitate, $a=0$, $f'(x)=e^{\frac{1}{x^2+x}}\cdot\frac{-2x-1}{(x^2+x)^2}$, $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0=\lim\limits_{x\to-1}f'(x)$ deoarece notând $\frac{1}{x^2+x}=-t$, $(x\in(-1,0))$ $t\to\infty$ când $x\to0$ sau $x\to-1$ avem $\lim\limits_{t\to\infty}t^2e^{-t}=0$.

2.746B Fie $f(x)=\begin{cases}x^m\sin\frac{1}{x}, & x\ne0\\ 0, & x=0\end{cases}$. Să se determine $m\in\mathbf{R}$ dacă f este derivabilă o dată, dar nu de două ori, pe $\mathbf{R}$. $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}x^{m-1}\sin\frac{1}{x}=0$ dacă $m-1>0$, $m>1$. Pentru $x\ne0$, $f'(x)=mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}-x^{m-2}\cos\frac{1}{x}$, deci $f''(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\left(mx^{m-2}\sin\frac{1}{x}-x^{m-3}\cos\frac{1}{x}\right)=0$ dacă $m>3$, şi $f''(0)$ nu există dacă $1<m\le3$.

2.747B Se cere valoarea $f'(2)$ pentru $f(x)=\frac{3x^2-1}{3x^3}+\ln\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arctg}x$, $x\ne0$, $f'(x)=\frac{1-x^2}{x^4}+\frac{x+1}{x^2+1}$; $f'(2)=\frac{1-4}{16}+\frac{3}{5}=\frac{33}{80}$.

2.748B Derivata $f^{(n)}(x)$ pentru $f(x) = e^{-x}x^2$, $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$, $(e^{-x}x^2)^{(n)} = (e^{-x})^{(n)}x^2 + n(e^{-x})^{(n-1)}2x + \frac{n(n-1)}{2}(e^{-x})^{(n-2)}2 = (-1)^n e^{-x}(x^2 - 2nx + n(n-1))$.

2.749B Dacă $g(x) = f(ax+1)$, $a \neq 0$ şi $f''(1) = 1$ (f derivabilă de două ori) atunci $g''(0) = a^2$; $g'(x) = af'(ax+1)$, $g''(x) = a^2 f''(ax+1)$, $g''(0) = a^2 f''(1) = a^2$.

2.750B Se cere $f^{(n)}(x)$ pentru $f(x) = x\ln(x+1)$, $x > -1$: $(x\ln(x+1))^{(n)} = (\ln(x+1))^{(n)} \cdot x + n(\ln(x+1))^{(n-1)}$; dar $\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(k)} = (-1)^k \frac{k!}{(x+1)^{k+1}}$, deci $f^{(n)}(x) = x\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n-1)} + n\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n-2)} = x(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n} + (-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{(x+1)^{n-1}}n =$
$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)![(x+1)-1]}{(x+1)^n} + (-1)^n\frac{(n-2)![(n-1)+1]}{(x+1)^n} =$
$= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^{n-1}} - (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n} + (-1)^n\frac{(n-1)!}{(x+1)^{n-1}} + (-1)^n\frac{(n-2)!}{(x+1)^{n-1}} =$
$= (-1)^n\frac{(n-2)!}{(x+1)^{n-1}} + (-1)^n\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$.

2.751B Dacă $f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{x^2+\lambda^2}$, $\lambda \in \mathbf{R}^*$ şi x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $f'(x) = 0$ atunci $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\frac{1+x_1x_2}{1-x_1x_2}\right)^{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2} = e^2$. $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+\lambda^2)^2}e^{\lambda x} + \frac{\lambda}{x^2+\lambda^2}e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda x^2 - 2x + \lambda^3 = 0$, $x_1 + x_2 = \frac{2}{\lambda}$, $x_1x_2 = \lambda^2$ deci $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^{\frac{1}{\lambda^2}} =$

$$e^{\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}-1\right)\frac{1}{\lambda^2}} = e^{\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{2}{1-\lambda^2}} = e^2.$$

2.752B Funcţia $f(x) = \frac{|x^2-6x+5|}{x^2+1}$ are limite laterale în $x = 5$ dar nu este derivabilă în $x = 1$. $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 0$ dar $f_s'(1) \neq f_s'(1)$.

2.753B În ce puncte din interiorul domeniului de definiţie D, funcţia $f(x) = \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$ nu este derivabilă. $D = [1,\infty)$, $f(x) = |\sqrt{x-1} - 3| = \begin{cases} \sqrt{x-1} - 3, & x \geq 10 \\ -\sqrt{x-1} + 3, & x < 10 \end{cases}$ deci în $x = 10$; $x = 1 \notin \mathrm{int}D$.

2.754B Cât este $f'(2)$ dacă $f(x) = (x^3)^{x^2}$, $x > 0$. Folosim formula $(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)}(g(x)\cdot\ln f(x))'$;
$((x^3)^{x^2})' = (x^3)^{x^2}(3x^2\ln x)' = (x^3)^{x^2}(3x + 6x\ln x)$, $f'(2) = 8^4(6 + 2\ln 64)$.

2.755B Pentru ce valori ale lui $a, b \in \mathbf{R}$, funcţiile $f(x) = x\ln(1 + a|x|)$ şi $g(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq e \\ \ln^3 x, & x > e \end{cases}$ sunt derivabile? $g_s(e) = ae + b = g_d(e) = 1$,

$g_d'(e) = \lim\limits_{\substack{x\to e \\ x>e}}\left(3\frac{1}{x}\ln^2 x\right) = \frac{3}{e} = g_s'(e) = a$ deci $a = \frac{3}{e}$, $b = -2$; pentru $a = \frac{3}{e}$, $f(x)$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$, $f_s'(0) = f_d'(0) = 0$.

2.756C Care este valoarea $\lambda = (f^{-1})'(3)$ dacă $f(x) = x^3 + x + 1$, $x \in \mathbf{R}$. f^{-1} există deoarece $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ şi f este strict crescătoare. Dacă $y_0 = f(x_0)$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$ atunci $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ deci pentru $y_0 = 3 = x_0^3 + x_0 + 1$ rezultă $x_0 = 1$, de unde $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3x+1}\Big|_{x=1} = \frac{1}{4}$.

2.757C Fie M mulţimea punctelor în care $h(x) = \sqrt[3]{x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2}$ nu are derivată şi k numărul elementelor lui M. Cât este k? Se observă uşor că $g = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2$ are pe 1 şi -1 rădăcini duble, deci $g = (x^2-1)^2(x-2)$, $h'(x) = \frac{4x(x^2-1)(x-2)+(x^2-1)^2}{3\sqrt[3]{[(x^2-1)^2(x-2)]^2}}$. În punctele $x = \pm 1$, $x = 2$, $h'(x)$ este infinită, dar h are derivată, deci $M = \emptyset$, $k = 0$.

2.758C Fie $f : (0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x + x + m$ şi M mulţimea acelor $m \in \mathbf{R}$ pentru care f este bijectivă. Pentru $m \in M$ calculaţi $\lambda = (f^{-1})'(m+1)$. $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ deci f injectivă. f este continuă pe $(0,\infty)$, $f(+0) = -\infty$, $f(\infty) = \infty$ deci f este surjectivă pe $M = \mathbf{R}$. Procedăm ca în 2.756C: $y_0 = m + 1 = \ln x_0 + x_0 + m$, $x_0 = 1$: $(f^{-1})'(m+1) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{x_0}{x_0+1}\Big|_{x_0=1} = \frac{1}{2}$.

2.759C Fie $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ şi $g(x) = 2\mathrm{arctg}\, x$, $x \in \mathbf{R}$; atunci $f'(x) = g'(x)$ pentru $|x| < 1$: $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & |x| < 1 \\ -\frac{2}{1+x^2}, & |x| > 1 \end{cases}$ nu există pentru $|x| = 1$, $g'(x) = \frac{2}{1+x^2}$ deci $f'(x) = g'(x)$ pentru $|x| < 1$.

2.760C Să se calculeze $l = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$; $l = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, x)}{\ln x}}$;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\, x}\cdot\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\, x} = -\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = -1.$$

2.761C $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{x}\right)\right]' = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{x}\right) + \frac{x}{\frac{1}{e} - \frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\right] = -1$.

2.762C Funcţia $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ este indefinit derivabilă şi $f^{(n)}(0) = 0$: $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right), \ldots, = f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}}P(\frac{1}{x})$ unde $P(\frac{1}{x})$ este un polinom în variabila $\frac{1}{x}$. Deci $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{P(t)}{e^t} = 0$.

2.763C Fie $f(x) = e^{2x}$ şi $g(x) = e^{-x}$ şi $a = f^{(10)}(-1) + g^{(19)}(2)$. Cât este a? $f^{(10)}(x) = 2^{10}e^{2x}$, $f^{(10)}(-1) = 2^{10}\cdot e^{-2}$, $g^{(19)}(x) = (-1)^{19}e^{-x}$,

$g^{(19)}(2) = -e^{-2}$, $a = e^{-3}(2^{10} - 1)$.
2.764C Vezi problema 2.746B.
2.765C Fie $f(x) = x^3+2x^2+4x+4$ bijectivă (deoarece $f'(x) = 3x^2+4x+4 >$ 0, $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$, $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$) deci există f^{-1}. Să se calculeze $(f^{-1})'(4)$. $y_0 = 4 = f(x_0) = x_0^3 + 2x_0^2 + 4x_0 + 4 \Rightarrow x_0 = 0$, $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, $(f^{-1})'(4) = \frac{1}{3x^2+4x+4}|_{x=0} = \frac{1}{4}$.
2.766B Să se determine $\lim_{t \downarrow 0} g^{(n)}(x)$ dacă $g(x) = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$, $x > 0$. Avem $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}})$, $g''(x) = \frac{1}{4x}(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}) - \frac{1}{4x\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}})$ deci $4xg''(x) = (e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}) - \frac{2}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}})$ sau $4xg''(x) + 2g'(x) = g(x)$. Derivăm de $n-2$ ori ultima egalitate, observând că $(xg''(x))^{(n-2)} = xg^{(n)}(x) +$ $(n-2)g^{(n-1)}(x)$, deci $4[xg^{(n)}(x) + (n-2)g^{(n-1)}(x)] + 2g^{(n-1)}(x) = g^{(n-2)}(x)$ de unde $2(2n-3)g^{(n-1)}(0) = g^{(n-2)}(0)$. Dăm valori lui n şi înmulţim egalităţile membru cu membru: $2 \cdot 1 \cdot g'(0) = g(0)$, $2 \cdot 3 \cdot g''(0) = g'(0)$, $2 \cdot 5 \cdot g'''(0) = g''(0), \ldots, 2 \cdot (2n-3)g^{(n-1)}(0) = g^{n-2}(0)$, $2 \cdot (2n-1)g^{(n)}(0) =$ $g^{(n-1)}(0) \Rightarrow 2^n \cdot (2n-1)!!g^{(n)}(0) = 2$. Altfel, dezvoltăm în serie $e^x =$ $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ (sau direct $\mathrm{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ şi obţinem $g(x) = 2\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{6!} + \ldots + \frac{x^n}{(2n)!} + \ldots\right)$, $g^{(n)}(x) = 2\left(\frac{n!}{(2n)!} + x\varphi(x)\right)$, $g^{(n)}(0) = 2 \cdot \frac{n!}{(2n)!} = 2 \cdot \frac{n!}{2^n \cdot n! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} = \frac{1}{2^{n-1}(2n-1)!!}$.

2.767C Punctele de continuitate ale funcţiei $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \in Q \\ x^3, & x \in \mathbf{R} \setminus Q \end{cases}$ sunt în mulţimea $(1,2) \cup (8,9)$ (vezi 691B, 697B) deoarece pentru $g(x) = 2^x - x^3$ avem $g(1) = 1 > 0$, $g(2) = -4 < 0$, $g(8) = 2^8 - 8^3 = 2^8 - 2^9 < 0$, $g(9) = 2^9 - 9^3 = 512 - 243 > 0$, iar punctele de continuitate sunt la intersecţia curbelor $y = 2^x$ şi $y = x^3$ deci acolo unde $g(x) = 0$. Există şi alte puncte de continuitate?
2.768C Fie $f(x) = \frac{1}{1+x}$ şi $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}(1)$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$. Prin inducţie se arată că $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$. $f^{(k)}(1) = (-1)^k \frac{k!}{2^{k+1}}$, $a_n =$ $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \to 1$.
2.769C Să se determine constantele A, B astfel ca funcţia $f(x) =$ $\begin{cases} Ae^{2x}, & x \le 0 \\ \sin 2x + B\cos 3x, & x > 0 \end{cases}$ să fie derivabilă. $f_s(0) = A = f_d(0) = B$, $f_s'(0) = 2Ae^{2x}|_{x=0} = 2A = f_d'(0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} (2\cos 2x - 3B\sin 3x)|_{x=0} = 2$, deci $A = B = 1$.

2.770C Funcţia $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este derivabilă, dar f' nu este continuă în $x = 0$: $f'(0) = \lim_{n\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{n\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$, $f'(x) =$ $2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, $x \ne 0$, $\lim_{n\to 0} f'(x) = -\lim_{n\to 0} \cos\frac{1}{x}$ nu există.
2.771C Funcţia $f(x) = \begin{cases} x[\frac{1}{x}], & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ este continuă în $x = 0$: pentru $x > 0$, $\frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n} \to n \le \frac{1}{x} < n+1$ deci $[\frac{1}{x}] = n$, $\frac{n}{n+1} < x \cdot [\frac{1}{x}] \le \frac{n}{n}$ pentru $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ de unde $1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \le \lim_{n\to\infty} x \cdot [\frac{1}{x}] \le \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$. Analog pentru $x < 0$.
2.772C Punctele $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ sunt puncte de întoarcere pentru funcţia $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$, $x \in \mathbf{R}$: $f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right)$, $x \ne \pm 1$, $f_s'(-1) = -\infty$, $f_d'(-1) = +\infty$, $f_s'(1) = +\infty$, $f_d'(1) = -\infty$.

2.5 Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatei

2.773A Soluţiile reale ale ecuaţiei $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0$ unde $a \in (5, 32)$ verifică $x_1 \in (0,2)$, $x_2 \in (2,3)$. Aplicăm şirul lui Rolle: $f(x) = 3x^4 -$ $4x^3 - 12x^2 + a$, $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$, $f(-1) = a - 5$, $f(0) = a$, $f(2) = a - 32$, construim tabloul şirului lui Rolle cu valorile $-\infty, -1, -0, 2, \infty$ pentru x pe orizontală şi $-\infty, 0, 5, 32, +\infty$ pentru a pe verticală. Dar $a \in (5, 32)$ deci $x_1 \in (0,2)$ şi $x_2 \in (2,3)$.
2.774A Să se determine punctul intermediar "c" din teorema Lagrange pentru funcţia $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3}, & x \in [-2, 1) \\ \frac{x+7}{4}, & x \in [1, 5] \end{cases}$, $x \in [-2, 5]$. $f(5) - f(-2) =$ $(5+2)f'(c)$, $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x+3}}, & x \in (-2, 1) \\ \frac{1}{4}, & x \in [1, 5) \end{cases}$, $f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c+3}} = \frac{2}{7}$ deci $c = \frac{1}{16}$.
2.775A Să se arate că $f(x) = x - \sin x$ şi $g(x) = -x + \cos x$ sunt respectiv strict crescătoare şi strict descrescătoare: $f'(x) = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \ge 0$, $g'(x) = -1 - \sin x = -(1 + \sin x) \le 0$.
2.776A Fie $f(x) = x^2 e^x$. Deoarece $f'(x) = (x^2 + 2x)e^{2x}$, semnul lui $f'(x)$ este semnul trinomului $x^2 + 2x$, $f'(x) \ge 0$ şi f este crescătoare în $(-\infty, -2]$ şi $[0, \infty)$, iar $f'(x) \le 0$ în $[-2, 0]$, deci în $[-2, 0]$ este descrescătoare strict.

2.777A Studiaţi monotonia funcţiei $f(x) = (x+1)\ln x$. $f'(x) = \frac{x+1}{x} + \ln x =$ $g(x) \geq 2$ deoarece $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1 + \lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x} + \ln x) = 1 + \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(1 + x\ln x) = +\infty$ $(\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0)$, $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$, $g'(1) = 0$, $g'(x) < 0$ pentru $x < 1$, $g'(x) > 0$ pentru $x > 1$ deci $g(x)$ descreşte pe $(0,1]$ şi creşte pe $[1,\infty)$ de unde $f'(x) \geq 2 > 0$, f strict crescătoare.

2.778A Funcţia $f : (-\infty,-1) \cup (0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ este strict crescătoare pe $(-\infty,-1)$ şi pe $(0,\infty)$. $f'(x) = (1+\frac{1}{x})^x\left[\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}\right]$ deci trebuie studiată funcţia $g(x) = \ln\frac{1+x}{x} - \frac{1}{x+1}$. $g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}$, $g'(x) > 0$ pe $(-\infty,-1)$ şi $g'(x) < 0$ pe $(0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{\substack{n\to -1\\ x<-1}} g(x) =$

$$\lim_{\substack{n\to -1\\ x<-1}}\left[\ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right] = -\lim_{\substack{n\to -1\\ x<-1}}\frac{1}{x+1}\left[1-(x+1)\ln\frac{x+1}{x}\right] = +\infty \text{ deoarece}$$

$$\lim_{\substack{n\to -1\\ x<-1}}(x+1)\ln\frac{x+1}{x} = \lim_{\substack{n\to -1\\ x<-1}}\frac{\ln\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{\substack{n\to -1\\ x<-1}}\frac{\frac{x}{x+1}(-\frac{1}{x^2})}{-(\frac{1}{x+1})^2} = 0.$$

Prin urmare g creşte de la 0 la $+\infty$ pe $(-\infty,-1)$, deci $g(x) > 0$, f crescătoare; Analog pe $(0,\infty)$, $g'(x) < 0$, g descreşte de la ∞ la 0 deci $g(x) > 0$, f creşte.

2.779A Fie $f : [1,6] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$ şi $m = \min f$, $M = \max f$: $f'(x) = \frac{x^2-16}{8x^2}$, $f'(x) < 0$ pe $[1,4]$ şi $f'(x) > 0$ pe $[4,6]$ are un minim în $x = 4$, $f(4) = 1$, $f(1) = \frac{17}{8}$, $f(6) = \frac{25}{12}$, deci $m = 1$ şi $M = \frac{17}{8}$.

2.780A Fie $f : [-2,0] \to \mathbf{R}$, $f(x) = |\frac{1+x}{1-x}|$. Să se determine $m = \min f$, $M = \max f$. Se face garficul funcţiei $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$ pe $[-2,0]$ iar pe intervalul $(-2,-1)$ unde $g(x) < 0$ se construieşte simetricul faţă de axa absciselor. Evident $m = 0 = f(-1)$ iar $M = \sup(|f(-2)|, f(0))$ deoarece $g'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$. g creşte de la $f(-2) = -\frac{1}{3}$ la $f(0) = 1$.

2.781A Să se determine $m = \min f$, $M = \max f$ unde $f : [0,10]$, $f(x) = \sqrt{x(10-x)}$: $f'(x) = \frac{-2x+10}{2\sqrt{x(10-x)}}$, $f'(x) > 0$ pentru $x < 5$, $f'(x) < 0$ pentru $x > 5$, $m = f(0) = f(10) = 0$, $M = f(5) = 5$.

2.782A $l = \lim\limits_{x\downarrow 0} x(\text{ctg}x + \ln x) = 1$, deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{tg}x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.

2.783A $l = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} =$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$.

2.784A Se cer valorile parametrului $m \in \mathbf{R}$ pentru care $f(x) = (x^2+mx)e^{-x}$ admite două puncte de extrem. $f'(x) = (-x^2 + (2-m)x + m)e^{-x}$, avem

două puncte de extrem dacă trinomul $-x^2 + (2-m)x + m$ are două rădăcini reale distincte şi $f''(x_0) \neq 0$, x_0 critic deci $\Delta = m^2 + 4 > 0$, adică $m \in \mathbf{R}$ (se poate arăta că $f''(x_0) \neq 0$).

2.785A Suma valorilor extreme ale funcţiei $f : (-2,2) \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln[x^2(4-x^2)]$ este $m = 2\ln 4 = 4\ln 2$. f este pară, $f'(x) = \frac{4x(2-x^2)}{x^2(4-x^2)}$, puncte de extrem $x = \pm\sqrt{2}$, $f(\pm\sqrt{2}) = \ln 4$, $x = 0$, $x = \pm 2$ asimptote verticale.

2.786A Fie $a \in \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R} \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2-2x+5}{x-a}$. Cât este a pentru care f admite două puncte de extrem. $f'(x) = \frac{x^2-2ax+2a-5}{(x-a)^2}$ ecuaţia $x^2 - 2ax + 2a - 5 = 0$ are două rădăcini reale distincte dacă $\Delta = a^2 - 2a + 5 = (a-1)^2 + 4 > 4 > 0$ deci admite două puncte de extrem pentru $(\forall)a \in \mathbf{R}$.

2.787A Punctele critice ale funcţiei $f(x) = x^2e^x$ (adică punctele pentru care $f'(x) = 0$) sunt 0 şi -2, $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$, deci $x \in \{0,-2\}$.

2.788A Fie $a = \lim\limits_{x\downarrow 0}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$; $b = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi - 2\text{arctg}x}{\ln(1+\frac{1}{x})}$. Cât este $a+b$? $\lim\limits_{x\downarrow 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} =$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x} = 1$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(\pi - 2\text{arctg}x)}{\ln(1+\frac{1}{x})^x} = \frac{2}{\ln e} = 2$ deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} x(\pi - 2\text{arctg}x) = 2$ (vezi 2.648C), deci $a + b = 3$.

2.789A Aplicarea teoremei Cauchy pentru funcţiile $f, g : [-1,2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = x^3 + 3x$ şi determinarea punctului c: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, $c \in (-1,2)$, $\frac{f(2)-f(-1)}{g(2)-g(-1)} = \frac{4+6-(1-3)}{2^3+6+1+3} = \frac{2}{3} = \frac{2c+3}{3c^2+3} \Rightarrow c_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.

2.790A Fie $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n, & x \in [-1,0] \\ px^2 + 4x + 4, & x \in (0,1] \end{cases}$. $m, n, p \in \mathbf{R}$. Notăm $S = m + n + p$, m, n, p pentru care f satisface teorema lui Rolle pe $[-1,1]$ şi T mulţimea punctelor c care se obţin aplicând această teoremă. Se cere S şi T. Din continuitatea şi derivabilitatea lui f în 0 obţinem $n = 4$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(2x + m) = m = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(2px + 4) = 4$. Dar $f(-1) = 1 - m + n = f(1) = p + 8 \Rightarrow m + p - n = -7$ deci $p = -7$. $f'(c) = 2c + m = 2c + 4 = 0 \Rightarrow c = -2 \notin [-1,1]$, $f'(c) = 2px + 4 = 0$, $c = -\frac{4}{2(-7)} = \frac{2}{7}$. Prin urmare $S = m + n + p = 4 + 4 - 7 = 1$, $T = \{\frac{2}{7}\}$.

2.791A Să se determine punctele c din teorema Lagrange pentru funcţia $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + x^2, & x \in [0,1) \\ -2x^2 + 12x - 7, & x \in [1,4] \end{cases}$. Funcţia $f(x)$ verifică condiţiile teoremei, iar $f(4) - f(0) = (4-0)f'(c) \to f'(c) = \frac{9}{4}$. Deci $f'(c) = -4c + 12 = \frac{9}{4}$ şi $c = \frac{39}{16}$ în $[1,4]$. $f'(c) = 6c^2 + 2c = \frac{9}{4} \Rightarrow c_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{\frac{29}{2}}}{6}$ deci $c = \frac{\sqrt{58}-2}{12}$.

2.792A $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^n-\sin^n x}{x^{n+2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\left(\frac{x^{n-1}+x^{n-2}\sin x+\ldots+x\sin^{n-2}x+\sin^{n-1}x}{x^{n-1}}\right) =$
$n\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = n\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = n\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{n}{6}$.
2.793A Se poate aplica teorema lui Rolle pe $[0,2]$ pentru funcţia $f(x) =$
$\begin{cases} a\ln(1+x), & x\in[0,1) \\ 2x^2+x+b, & x\in[1,2] \end{cases}$? Continuitatea şi derivabilitatea în $x=1$ ne
dau $a\ln 2 = 3+b$, $f'(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{a}{1+x} = \frac{a}{2} = (4x+1)|_{x=1} = 5$ deci $a=10$,
$b = 10\ln 2 - 3$. Dar condiţia $f(0)=0=f(2)=10+b$ nu este satisfăcută.
2.794A Funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x-2}{x^3}$ are în punctul $x=3$ un
maxim: $f'(x) = 2\frac{3-x}{x^4}$, $f'(x)>0$ pentru $x<3$ şi $f'(x)<0$ pentru $x>3$.
2.795A Se cere numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $x^3-3x-10=0$. Formăm
şirul lui Rolle: $f(x)=x^3-3x-10$, $f'(x)=3x^2-3=0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 1$,
$f(-\infty)=-\infty$, $f(-1)=-8$, $f(1)=-12$, $f(+\infty)=+\infty$ deci are o singură
rădăcină reală mai mare decât 1.
2.796A Să se determine numărul soluţiilor reale şi intervalele în care se află
ele pentru ecuaţia $x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2-1=0$; şirul lui Rolle: $4x^3+4x^2-8x=0$,
$x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=1$, $f(-\infty)=+\infty$, $f(-2)=-\frac{32}{3}-1$, $f(0)=-1$,
$f(1)=-\frac{8}{3}$, $f(+\infty)=+\infty$, deci $x_1\in(-\infty,-2)$, $x_2\in(1,\infty)$.
2.797A Funcţia $f(x)=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$ este concavă pe $(-\infty,0)$ şi $(0,\infty)$
deoarece $f'(x)=\frac{2}{1+x^2}\cdot\frac{x}{|x|} = \begin{cases}\frac{-2}{1+x^2}, x<0\\ \frac{2}{1+x^2}, x>0\end{cases}$, $f''(x) = \begin{cases}\frac{4x}{(1+x^2)^2}, x<0\\ \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, x>0\end{cases}$,
$f'(x), f''(x)$ nu există în $x=0$, deci $f''(x)<0$ pentru $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.
2.798A $a=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{2}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\ln 2} =$
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2^x\ln^2 2} = 0$ deci $a+b=\frac{1}{2}$.
2.799A Fie $f(x)=mx-\ln(1+x^2)$ $\forall x\in\mathbf{R}$ şi $A=\{m\in\mathbf{R}|f$ este
crescătoare$\}$. Atunci $A=[1,\infty]$ deoarece $f'(x)=m-\frac{2x}{1+x^2}\geq 0$, $-1\leq$
$\frac{2x}{1+x^2}\leq 1 \Rightarrow 1\leq m$.
2.800B $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x\ln x$ are un singur punct de extrem $x=\frac{1}{e}$
deoarece $f'(x)=1+\ln x=0\Rightarrow x=\frac{1}{e}$ şi $f'(x)>0$, $x>\frac{1}{e}$, $f'(x)<0$, $x<\frac{1}{e}$.
2.801B Cât sunt $a,b\in\mathbf{R}$ astfel ca graficele funcţiilor $f(x)=ax^2+bx+2$ şi
$g(x)=1-\frac{1}{x}$ să aibă tanentă comună în $x=1$. $g(1)=0=f(1)=a+b+2$,
$g'(1)=\frac{1}{x^2}|_{x=1}=1=f'(1)=(2ax+b)|_{x=1}=2a+b$ de unde $a=3$, $b=-5$.
2.802B Fie $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, x\in[-1,0]\\ 1+\ln(x^2+1), x\in(0,1]\end{cases}$ unde
$a,b\in\mathbf{R}$ sunt astfel încât lui f i se poate aplica teorema lui Rolle pe $[-1,1]$ şi
$S=a+b+c$. Cât este S? Continuitatea şi derivabilitatea lui f în 0 precum

şi condiţia $f(-1)=f(1)$ ne dau: $f(0)=1=c$, $f'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{2x}{1+x^2} =$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(2ax+b)=b$, $f(-1)=a-b+c=f(1)=1+\ln 2$ deci $S\in\left[\frac{5}{3},\frac{7}{4}\right]$.
2.803B Fie M mulţimea valorilor $m\in\mathbf{R}$ pentru care ecuaţia $\frac{1}{3}x^3+x^2-$
$x-2\ln x+m=0$ admite două soluţii distincte reale; cât este M?. $(\frac{1}{3}x^3+$
$x^2-x-2\ln x+m)'=x^2+2x-1-\frac{2}{x}=\frac{(x+2)(x^2-1)}{x}=0$ deci $x_1=1$
$(-2$ şi -1 nu convin$)$. $f(+0)=\lim\limits_{x\downarrow 0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$ (deoarece
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^3}=0$), $f(1)=\frac{1}{3}+m<0$, deci $m<-\frac{1}{3}$.
2.804B Se cere $a,m,n\in\mathbf{R}$ astfel ca funcţiei $f:[0,2]\to\mathbf{R}$, $f(x)=$
$\begin{cases}ax^2+ax, & x\in[0,1]\\ x^3+mx^2+nx, & x\in(1,2]\end{cases}$ să i se poată aplica teorema Rolle pe $[0,2]$.
Notăm $M=\{c\in(0,2)$, c din teorema Rolle, $\lambda=\sum\limits_{c\in M}$; cât este λ? Se
procedează ca în 2.802B: $f(1)=a+1=1+m+n$, $f'(1)=2+a=$
$3+2m+n$, $f(0)=0=f(2)=8+4m+n \Rightarrow a=m=-1$, $n=0$,
$f(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\in[0,1]\\ x^3-x^2, & x\in(1,2]\end{cases}$, $f(2)-f(0)=(2-0)f'(c)\Rightarrow f'(c)=2=$
$\begin{cases}2c-1, & x\in(0,1)\\ 3c^2-c, & x\in(1,2)\end{cases}$; $c=\frac{3}{2}$ şi $c=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$ nu convin, $c=\frac{1+\sqrt{7}}{3}=\lambda$.
2.805B. Ecuaţia $2\ln x=mx^2+1$ are două soluţii reale pentru $m\in\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$:
$f(x)=2\ln x-mx^2-1$, $x>0$, $f'(x)=2\frac{1-mx^2}{x}=0\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{m}}$, $m>0$
este punct de maxim, $f(+0)=-\infty$, $f(\infty)=-\infty$, deci trebuie ca $f\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)=$
$-\ln m-2>0$, $m<\frac{1}{e^2}$, $m\in\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$.
2.806B Fie $f:[a,b]\to[a,b]$, f continuă surjectivă. Atunci există $c\in[a,b]$
astfel încât $f(c)=c$. Notăm $g(x)=x-f(x)$ şi avem $g(a)=a-f(a)<0$,
$g(b)=b-g(b)>0$, g continuă, şi conform proprietăţii lui Darboux rezultă
că există $c\in[a,b]$ astfel ca $g(c)=0$, deci $f(c)=c$.
2.807B Fie $f,g:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$, $g(x)=\operatorname{arctg}x$. Atunci
$f(x)-g(x)=0$. $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)}}}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{|1-x^2|}=\frac{1}{1+x^2}$,
$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, deci $(f(x)-g(x))'=0\Rightarrow f(x)-g(x)=k$ şi dăm valoarea
$x=0$ obţinem $f(0)-g(0)=0=k$.
2.808B Dacă $f,g:[0,\infty)$, $f(x)=\frac{1}{2}\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $g(x)=\operatorname{arctg}x$, atunci

$f(x)-g(x)=-\frac{\pi}{4}$; $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-4x}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{4x^2}}=\frac{-1}{1+x^2}$;
$g'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$, $(f(x)-g(x))'=0\Rightarrow f(x)-g(x)=c$, $f(1)-g(1)=-\frac{\pi}{4}=c$.
2.809B Dacă $f(x)=x\ln x+ax^3$, $x>0$ şi $A=\{a\in\mathbf{R}|f$ are două puncte de inflexiune $\}$, atunci $A=\emptyset$: $f'(x)=1+\ln x+3ax^2$, $f''(x)=\frac{1}{x}(1+6ax^2)=$
$0\Rightarrow x^2=-\frac{1}{6a}$ deci $a<0$, $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{-6a}}$. Dar $x>0$, deci avem un singur
punct de inflexiune, iar $A=\emptyset$.

2.810B Funcţiile $f(x)=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, $g(x)=\arcsin x+\arccos x$,
$x\in[-1,1]$ sunt constante şi egale ambele cu $\frac{\pi}{2}$; $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot(-\frac{1}{x^2})=$
0, $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$ deci $f(x)=k$, $g(x)=k_1$, dar în $x=1$ iau
valorile $\frac{\pi}{2}$, $f(1)=2\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{2}$, $g(1)=\frac{\pi}{2}$ de unde $k=k_1=\frac{\pi}{2}$.

2.811B Folosind monotonia funcţiei $f(x)=x\ln x$, $x>0$, să se pună în
ordine crescătoare numerele $a=(\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}}$, $b=(\frac{8}{5})^{\frac{8}{5}}$, $c=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. $f'(x)=1+$
$\ln x>0$ dacă $\ln x>-1=\ln\frac{1}{e}$ deci $x>\frac{1}{e}$ şi f crescătoare pentru $x>\frac{1}{e}$.
Din $\sqrt{2}=1,4\ldots<\frac{3}{2}=1,5<\frac{8}{5}=1,6$ rezultă $c<a<b$.

2.812B $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}=0^{+\infty}=0$ ($0^{+\infty}$ nu este nedeterminare).

2.813B Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sin^n x\cos x$, $n\geq 2$ şi $M_n=\max\limits_{x\in\mathbf{R}}f(x)$. Să se
calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}M_n$. $f'(x)=n\sin^{n-1}x\cdot\cos^2 x-\sin^{n+1}x=\sin^{n-1}x(n\cos^2 x-$
$-\sin^2 x)\Rightarrow\operatorname{tg}^2 x=n$; $(\operatorname{tg}^2 x_0=n)$, $M_n=(\sin^2 x_0)^{\frac{n}{2}}(\cos^2 x_0)^{\frac{1}{2}}=$

$$=\left(\frac{\operatorname{tg}^2 x_0}{1+\operatorname{tg}^2 x_0}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x_0}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{(\frac{n+1}{n})^n}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2.814B Ecuaţia $x^3-3x+m=0$, $m\in\mathbf{R}$ nu are două soluţii distincte în $[0,1]$. $f'(x)=3(x^2-1)=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm 1$, $f(-1)=m+2>0$, $f(1)=m-2<0$ deci trei soluţii avem când $-2<m<2$ şi o soluţie dacă $m\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$. În $[-1,1]$, deci şi în $[0,1]$, avem ori o soluţie ori nici una.

2.815B Fie $f(x)=x^3-3x^2+2x$. Există o infinitate de puncte $x_1,x_2\in\mathbf{R}$, $x_1\neq x_2$ astfel încât $f'(x_1)=f'(x_2)$ şi un punct $x_0\in\mathbf{R}$ astfel încât $f(x_0+x)=-f(x_0-x)$, $\forall x\in\mathbf{R}$. Care sunt valorile lui x_0 şi $s=x_1+x_2$?. $f(x)=x(x-1)(x-2)$ este simetrică faţă de un punct, $x_0=1$, $y_0=0$ deci $f(1+x)=-f(1-x)$. În punctele $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ simetrice faţă de $(1,0)$

pantele tangentelor la curbă sunt egale, $f'(x_1)=f'(x_2)\Rightarrow(x_1-x_2)[(x_1+$
$x_2)-2]=0$, dar acestea verifică relaţia $x_1+x_2=2$. Poate fi folosită şi
teorema Lagrange pe intervale $[a,b]=[1-m,1+m]$ simetrice faţă de 1,
eventual făcând o translaţie $t=x-1$ şi obţinem $y=x(x^2-1)$ simetrică
faţă de $(0,0)$.

2.816B Punctele de extrem ale funcţiei $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x^2e^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$ sunt $x=0$
şi $x=2$, iar $x=0$ este şi punct unghiular; $f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}$ $(x\geq 0)$ se
anulează în 0 şi 2; 0 este punct de minim şi 2 punct de maxim.

2.817B Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$ şi x_1,x_2,x_3 abscisele punctelor sale de extrem. Să se determine $E=\sum\limits_{j=1}^{3}x_j f(x_j)$.

$f(x)=\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}\right]\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}\right]\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]=$
$=\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]=\left(x-\frac{3}{2}\right)^4-\frac{10}{4}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{16}$; $f'(x)=$
$\left(x-\frac{3}{2}\right)^3-5\left(x-\frac{3}{2}\right)=\left(x-\frac{3}{2}\right)\left[4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-5\right]$; $x_1=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}$,
$x_3=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$, $f(x_1)=f(x_3)=-1$, $f(x_2)=\frac{9}{16}$, $E=\sum\limits_{j=1}^{3}x_j f(x_j)=-\dfrac{69}{32}$.

2.818B Să se afle aria laterală a conului de volum maxim înscris în sfera de rază R. Notăm raza bazei conului cu x distanţa de la centrul sferei la baza conului cu h: $h=\sqrt{R^2-x^2}$, $V=\frac{\pi x^2(R+h)}{3}=\frac{\pi}{3}x^2(R+\sqrt{R^2-x^2})=f(x)$,
$f'(x)=\frac{x[2(R+\sqrt{R^2-x^2})\sqrt{R^2-x^2}-x^2]}{\sqrt{R^2-x^2}}=0$ punctul de maxim este $x_0^2=\frac{8}{9}R^2$,
$h=\frac{R}{3}$, aria laterală $S=\pi x_0 G$, $G=\sqrt{x_0^2+h^2}=2R\sqrt{\frac{2}{3}}$, $S=\frac{8\pi R^2\sqrt{3}}{9}$.

2.819B Să se afle valorile lui m pentru care funcţia $f(x)=\frac{(m-1)e^x-me^{-x}}{1+e^x}$ este monotonă pe tot domeniul său de definiţie:
$f'(x)=\frac{[(m-1)e^x+me^{-x}](1+e^x)-e^x[(m-1)e^x-me^{-x}]}{(1+e^x)^2}=\frac{(m-1)e^{2x}+2me^x+m}{e^x(1+e^x)^2}$ de unde
$(m-1)e^{2x}+2me^x+m>0\Rightarrow m(e^{2x}+2e^x+1)>e^{2x}$ deci $m>\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^2$, f este
monoton crescătoare pe $\mathbf{R}$ pentru $m\geq 1$ ($\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=$
0) şi monoton descrescătoare pe $\mathbf{R}$ pentru $m\leq 0$, deci $m\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.

2.820B Funcţia $f:\mathbf{R}\setminus\{-1\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}$ este constantă pe porţiuni: $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\frac{2}{(1+x)^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$ deci $f(x)=$

k_1, k_2, $f(0) = \frac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x > -1 \\ -\frac{3\pi}{4}, & x < -1 \end{cases}$ deci f este constantă pe porţiuni.

2.821B Punctele de extrem ale funcţiei $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$;

$$f(x) = \begin{cases} -xe^{x-1}, & x \le 0 \\ xe^{x-1}, & 0 < x \le 1 \\ xe^{1-x}, & 1 < x \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} -(x+1)e^{x-1}, & x \in (-\infty, 0) \\ (x+1)e^{x-1}, & x \in (0,1) \\ (1-x)e^{1-x}, & x \in (1,\infty) \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$f'(x)$	$+$	$+++$	0	$---$	$-\frac{1}{e} \vert \frac{1}{e}$	$+++$	$2 \vert 0$	$---$	
$f(x)$	0	$\uparrow$	e^{-2}	$\downarrow$	0	$\uparrow$	1	$\downarrow$	0

Deci f admite punctele de extrem $-1, 0, 1$, în 0 şi 1 f nu este derivabilă şi sunt puncte unghiulare.

2.822B Să se determine punctele c din teorema Rolle pentru $f(x) = \sin x$, $x \in [-\pi, 3\pi]$. $f'(c) = \cos c = 0$, deci punctele c sunt $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ sau altfel scris $c \in \{\pm\frac{\pi}{2}, 2\pi \pm \frac{\pi}{2}\}$.

2.823B Să se determine parametrii reali m, n, p astfel ca funcţiei $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n, & x \in [-1, 0) \\ px^2 + 4x + 4, & x \in [0,1] \end{cases}$ să i se poată aplica teorema Rolle. Condiţiile sunt: continuitate şi derivabilitate în 0 şi $f(-1) = f(1)$. $f_s(0) = n = f_d(0) = 4$, $f'_s(0) = m = f'_d(0) = 4$, iar $f(-1) = 1 - m + n = 1 = f(1) = p + 8 \Rightarrow p = -7$.

2.824B Să se determine parametrul real m astfel ca ecuaţia $x^3 + 3x^2 - mx + 5 = 0$ să aibă trei soluţii reale distincte. Separăm pe m, $\frac{x^3+3x^2+5}{x} = m$, reprezentăm grafic funcţia $f(x) = \frac{x^3+3x^2+5}{x}$, $x \neq 0$ şi-i alegem pe acei m pentru care dreptele $y = m$ taie în trei puncte graficul lui f. $f'(x) = \frac{(x-1)(2x^2+5x+5)}{x^2}$, $f'(x) < 0$ pentru $x < 1$ ($x \neq 0$) şi $f'(x) > 0$ pentru $x > 1$, $x = 0$ asimptotă verticală $f_s(0) = -\infty$, $f_d(0) = +\infty$, punctul $(1, 9)$ este punct de minim $f(-\infty) = f(+\infty) = +\infty$ deci pentru $m > 9$ avem trei soluţii reale distincte.

2.825B Ce valori ia m pentru ca ecuaţia $x^3 - x^2 - x + m = 0$ să aibă trei rădăcini reale distincte. $f(x) = x^3 - x^2 - x + m$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$ pentru $x_1 = 1$ şi $x_2 = -\frac{1}{3}$; $f(-\frac{1}{3}) = m + \frac{5}{27}$, $f(1) = m - 1$, $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$ deci trebuie ca $m + \frac{5}{27} > 0$ şi $m - 1 < 0$, deci $-\frac{5}{27} < m < 1$ (şirul lui Rolle $(-,+,-,+)$).

2.826B Care sunt punctele c din teorema (formula) Lagrange $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ pentru funcţia $f(x) = x + \sin x$ pe intervalul $[-2\pi, 2\pi]$. $f(2\pi) - f(-2\pi) = [2\pi - (-2\pi)]f'(c)$, $4\pi = 4\pi[1 + \cos c) \Rightarrow \cos c = 0$ deci $c \in \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}\}$.

2.827C Aflaţi $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât ecuaţia $2x + \ln x - \lambda(x - \ln x) = 0$ să aibă două soluţii reale şi distincte. $\lambda = \frac{2x+\ln x}{x - \ln x} = f(x)$, graficul lui $f(x)$ îl intersectăm cu dreptele $y = \lambda$. $x - \ln x \neq 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}_+^* = (0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{\ln x}{x}} = 2$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\frac{x}{\ln x} + 1}{\frac{x}{\ln x} - 1} = -1$, $f'(x) = \frac{3(1-\ln x)}{(x - \ln x)^2}$, $f'(x) > 0$ în $(0, e)$, $f'(x) < 0$ în (e, ∞), f are un maxim în $x = e$, $f(e) = \frac{2e+1}{e-1} > 2$, asimptotă orizontală $y = 2$, verticală nu are, există x_0, $0 < x_0 < e$ cu $f(x_0) = 0$ ($\ln x_0 = -2x_0$).

	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+++$	0	$---$	0
$f(x)$	-1	$\uparrow$	$\frac{2e+1}{e-1}$	$\downarrow$	2

Se observă că pentru $2 < \lambda < \frac{2e+1}{e-1}$ avem două soluţii distincte.

2.828C $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{x-1}{2x^2} + \frac{1}{x(e^{2x}-1)}\right) = \lim\limits_{x\to0} \frac{e^{2x}(x-1)+x+1}{2x^2e^{2x} - 2x^2} = \lim\limits_{x\to0} \frac{e^{2x} + 2e^{2x}(x-1)+1}{4xe^{2x} + 4x^2e^{2x} - 4x} =$
$= \lim\limits_{x\to0} \frac{4e^{2x} + 4e^{2x}(x-1)}{4[e^{2x}(2x^2+4x+1)-1]} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x}{2x^2+4x+1-e^{-2x}} = \frac{1}{6}$.

2.829C Să se calculeze $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} [f^{(k)}(1) - f^{(k+1)}(1)]$ pentru $f : (0,2) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2}{x^2+2x}$. Evident $S_n = f'(1) - f^{(k+1)}(1)$ şi $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$. Se ştie că $\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(k)} = (-1)^k \frac{k!}{(x+a)^{k+1}}$ (se arată prin inducţie) deci $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!\left[\frac{1}{x^{n+2}} - \frac{1}{(x+2)^{n+2}}\right]$, $f^{(n+1)}(1) = (-1)^{n+1}(n+1)!\left[1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right]$, $f'(1) = -1 + \frac{1}{9} = -\frac{8}{9}$ deci $S_n = -\frac{8}{9} + (-1)^n(n+1)!\left[1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right]$.

2.830C Funcţia $f(x) = |x|(x^2 - 1)$ are trei puncte de extrem local $-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}$,
$f(x) = \begin{cases} x^3 - x, & x > 0 \\ -x^3 + x, & x \le 0 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & x > 0 \\ \text{nu există în} & x = 0 \\ -3x^2 + 1, & x < 0 \end{cases}$; $f'_s(0) = 1$, $f'_d(0) = -1$, $f(0) = 0$, 0 fiind unghiular, f este pară (simetrie faţă de Oy).

2.831C Fie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ o funcţie cu derivata continuă şi injectivă pe $[a,b]$. Dacă se aplică teorema Lagrange lui f pe intervalul $[a,x]$, $x \in (a,b]$, valoarea lui c care se obţine depinde de x şi o notăm cu $c(x) = c_x$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to a} c(x)$. R. $f(x) - f(a) = (x-a)f'(c_x)$, $a < c_x < x$. Dar f' este continuă deci $f'(c_x) \to f'(a)$ pentru $x \to a$, $c_x \to a$ şi fiind injectivă, trecând la limită în inegalitatea $a < c_x < x$, $\lim_{x\to a} c_x = a$.

2.832C Pentru funcţiile $f(x) = x$, $g(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$, $h(x) = x - \frac{x^2}{2}$ să se stabilească ordinea $h < g < f$. Evident $h(x) = x - \frac{x^2}{2} < f(x) = x$. Fie $\varphi(x) = x - \ln(1+x)$, $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) < 0$ pe $(-1,0)$ deci φ descreşte, iar pe $(0,\infty)$, $\varphi'(x) > 0$, φ creşte, prin urmare $\varphi(x) \geq 0$, $f \geq g$. Să arătăm $g \geq h$: $\psi(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$, $\psi(0) = 0$, $\psi'(x) = \frac{1}{1+x} + (x-1) \geq 0$, ψ creşte, deci $\psi(x) \geq 0$, prin urmare $h \leq g \leq f$. Deoarece $x > 0$ rezultă $h < g < f$.

2.833C Să se calculeze $f^{(n)}(0)$ pentru $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \neq 1$. Avem $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ (prin inducţie), $f^{(n)}(0) = n!$.

2.834C Găsiţi care din funcţiile derivabile de mai jos satisfac egalitatea $f(x+y) = f(x) + f(y)$: a) e^x; b) ax; c) $\ln x$; d) $ax+b$; e) $\sin x$; f) $\cos x$. Verificând cele şase funcţii din grilă observăm că verifică b): $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$. Se poate determina funcţia care verifică egalitatea: $f(0+0) = f(0)+f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(y+x) - f(y)}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ deci $f'(y) = f'(0) = a \Rightarrow f(y) = ay + c$ etc.

2.835C Fie $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$, derivabilă astfel încât $f(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ şi $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,\infty)$; să se arate că f este identic nulă. Dacă nu ar fi identic nulă, $f(0) = 0$ şi $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ crescătoare deci $f(x) \geq 0$; dacă există x_0, unde $f(x_0) > 0$, pentru a avea $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ar trebui ca începând cu un x_1 să fie descrescătoare, fals.

2.836C Se consideră o funcţie continuă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi o funcţie derivabilă $x : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ astfel încât $x'(t) = f(x(t)) - 1$, $\forall t \in [0,\infty)$ şi $l = \lim_{t\to\infty} x(t)$ există şi este finită, iar $\lim_{t\to\infty} x'(t) = 0$. Să se calculeze $f(l)$. Avem $\lim_{t\to\infty} x'(t) = 0 = \lim_{t\to\infty} f(x(t)) - 1 = f(\lim_{t\to\infty} x(t)) - 1 = f(l) - 1 = 0$ deci $f(l) = 1$.

2.837C Pentru ce valori ale parametrului real m, ecuaţia $\sin 2x + 2\sin x = m$ are două soluţii reale în $(0, 2\pi)$. Intersectăm graficul lui $f(x) = \sin 2x + 2\sin x$ cu $y = m$; $f'(x) = 2\cos 2x + 2\cos x = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 0 \Rightarrow \cos x = -1$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $x_1 = \pi$ este punct de inflexiune, iar $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{5\pi}{3}$ sunt puncte de extrem cu $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(\frac{5\pi}{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$ valorile extreme. Deci pentru $m \in \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ avem două rădăcini; pentru $m = 0$ o singură rădăcină $x = \pi$.

2.838C Funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ este continuă, strict crescătoare şi are asimptota orizontală $y = a$. Funcţia $g : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ este continuă, strict

descrescătoare şi are asimptota orizontală $y = b$. Ştiind că $a > b$ precizaţi numărul n de rădăcini ale ecuaţiei $f(x) = g(x)$, $x \in (0,\infty)$. Uşor rezultă grafic, că nu există nici o rădăcină când $f_d(0) > g_d(0)$ şi o rădăcină când $f_d(0) < g_d(0)$. Analitic, folosim $h(x) = f(x) - g(x)$ care nu are schimbare de semn pe $(0,\infty)$ pentru $f_d(0) > g_d(0)$ şi are o schimbare de semn pentru $f_d(0) < g_d(0)$ ($f_d(0), g_d(0)$ limitele la dreapta).

2.839C Să se determine m astfel încât ecuaţia $x^2 - \ln x + m = 0$ să aibă două rădăcini reale. Procedăm ca în 2.837C, intersectând graficul funcţiei $f(x) = -2\ln x + x^2$ cu $y = -m$ sau folosim şirul lui Rolle. $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 2 \cdot \frac{x^2-1}{x} = 0$, $x_{1,2} = \pm 1$, deci $x_1 = 1$, $f(1) = 1 + m$, $f(+\infty) = f(-\infty) = +\infty$ deci pentru a avea două rădăcini este necesar ca $f(1) = m+1 < 0$, $m < -1$.

2.840C Numărul n al punctelor de extrem şi m al punctelor de inflexiune al funcţiei $f : \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ este $n = 0$, $m = 1$: $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$, $f'(x) = 2\left(-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x+1)^3}\right)$, $f''(x) = 6\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{(x+1)^4}\right)$, $f'(x) = -2 \cdot \frac{3x^2+3x+1}{x^3(x+1)^3}$, $f''(x) = 6 \cdot \frac{4x^3+6x^2+4x+1}{x^4(x+1)^4}$, $f'(x) = 0$ nu are rădăcini reale iar $f''(x) = 0$ are o singură rădăcină reală ($(4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)' = 12x^2 + 12x + 4 > 0$) deci $n = 0$, $m = 1$.

2.841C Să se determine mulţimea punctelor $(m,n) \in \mathbf{R}^2$ (din planul variabilelor m,n) pentru care ecuaţia $x^3 - 3x + m^2 + n^2 - 7 = 0$ are trei rădăcini reale distincte. Aplicăm şirul lui Rolle cu doi parametri m şi n. $f(x) = x^3 - 3x + m^2 + n^2 - 7$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, $x_{1,2} = \pm 1$, $f(-1) = m^2 + n^2 - 5$, $f(1) = m^2 + n^2 - 9$, $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$ deci condiţia este $f(-1) = m^2 + n^2 - 5 > 0$, $f(1) = m^2 + n^2 - 9 < 0$, deci $5 < m^2 + n^2 < 9$ o coroană circulară în planul variabilelor m,n.

2.842C Fie $f(x) = \frac{e^{|x|}}{x+1}$, $x \neq -1$ şi $A = \{x, x \in \mathbf{R} | x$ este abscisa unui punct de extrem local al lui $f\}$, $B = f(A)$. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x+1}, & x \leq 0 \\ \frac{e^x}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2}, & x \neq -1 \\ \frac{xe^x}{(x+1)^2}, & x > 0 \end{cases}$$

deci $x = -2$ este punct de extrem, iar $x = 0$ este punct unghiular ($f'_s(0) = -2$, $f'_d(0) = 0$) şi punct de extrem $f(-2) = -e^2$, $f(0) = 1$ deci răspunsul este $B = \{-e^2, 1\}$.

2.843C Fie $f(x) = \frac{x^2+ax+1}{\sqrt{x^2+1}}$, $a \in \mathbf{R}$, $A = \{a \in \mathbf{R}, f(\mathbf{R}) = [0,\infty)\}$ şi $S = \sum_{a\in A} a$. Cât este S? Evident $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$. Condiţia $f(\mathbf{R}) = [0,\infty)$ este verificată dacă $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$ (condiţie necesară pentru ca $x^2 + ax + 1 \geq 0$). Dar dacă $a \neq \pm 2$, $f(x) > 0$, prin urmare $a = \pm 2$, $f(x) = \frac{(x\pm1)^2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0$,

$f(\pm 1) = 0$ şi $S = 2 - 2 = 0$.

2.6. Grafice de funcţii

2.844C Să se determine punctele $M(x_0, y_0)$ în care funcţiile $f(x) = e^x - 1$ şi $g(x) = \ln(x+1)$, $x \in (0, \infty)$ au graficele tangente. $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, $f'(0) = 1 = g'(0) = 1$; deci sunt tangente în (0,0) şi tangente în (0,0) la prima bisectoare $y = x$. ($f''(x) = e^x > 0$, $g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$).

2.845A Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel ca graficul funcţiei $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-1}$, $x \neq 1$ să treacă prin $(2, 8)$, iar tangenta în $x = 2$ la grafic să fie paralelă cu dreapta $y = -3x + 1$. $f(2) = 8 \to 2a + b = 4$, $f'(x) = \frac{x^2+x(a-2)-a-b}{(x-1)^2}$, $f'(2) = a - b = -3 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{10}{3}$.

2.846A Fie $f : [1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$. Ecuaţia tangentei la graficul lui f în $x = 2$: $f(2) = \sqrt{5}$, $f'(2) = \left.\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}\right|_{x=2} = \frac{3}{\sqrt{5}}$ deci ecuaţia este $y - \sqrt{5} = \frac{3}{\sqrt{5}}(x - 2)$.

2.847A Aflaţi valoarea lui $m \in \mathbf{R}$ ştiind că dreapta $y = mx + 4$ este tangentă la curba dată de $y = 2x^3 + 4x$. Fie (x_0, y_0) punctul de tangenţă. Condiţiile se scriu $f'(x_0) = 6x_0^2 + 4 = m$, $y_0 = mx_0 + 4$, $y_0 = 2x_0^3 + 4x_0 \Rightarrow y_0 = x_0(6x_0^2 + 4) + 4 = 2x_0^3 + 4x_0$ deci $4x_0^3 + 4 = 0$ şi $x_0 = -1$ iar $m = 10$.

2.848A Să se determine abscisele punctelor de pe graficul funcţiei $y = x + \sin x$, $x \in [-\pi, \pi]$ unde tangentele la grafic sunt paralele cu dreapta $y = \sqrt{3}x$. $y' = 1 + \cos x = \sqrt{3}$, $\cos x = \sqrt{3} - 1$, $x = \pm \arccos(\sqrt{3} - 1)$.

2.849A Tangenta la curba $y = x^2 - x$ în punctul $A(1, 0)$ are ecuaţia $y = x - 1$; $y'(1) = (2x-1)|_{x=1} = 1 = m$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ ecuaţia $y - y_0 = m(x - x_0)$ devine $y = x - 1$.

2.850A Se consideră semicercul $y = \sqrt{4 - (x-1)^2}$, $x \in [-1, 3]$ şi punctele de pe cerc de abscisă $1 - a$, $1 + a$, unde tangentele la semicerc sunt paralele cu prima bisectoare $y = x$ respectiv cu a doua bisectoare $y = -x$. Se cere a. $y' = \frac{-(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \pm 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 2$, $x = 1 \pm \sqrt{2}$, $a = \sqrt{2}$. Se poate rezolva şi cu geometrie analitică.

2.851A Pentru $f : \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{e}, 0, \frac{1}{e}\right\}$, $f(x) = \left|\frac{\ln|x|}{1+\ln|x|}\right|$ punctele $x = \pm 1$ sunt puncte unghiulare. Se vede uşor pe grafic. Se face întâi graficul $y = \frac{\ln|x|}{1+\ln|x|}$ care fiind pară, $f(-x) = f(x)$ este suficient să facem numai pentru $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{\ln x}{1+\ln x}$. $f'(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)} > 0$. f creşte pe fiecare interval $(0, \frac{1}{e})$

şi $(\frac{1}{e}, \infty)$, $f_d(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, $y = 1$ asimptotă orizontală, $x = \frac{1}{e}$ asimptotă verticală, $f_s(\frac{1}{e}) = +\infty$, $f_d(\frac{1}{e}) = -\infty$, $f'_d(0) = \infty$, 0 este punct de întoarcere, $f'_s(1) = -1$, $f'_d(1) = 1$, $f(1) = 0$ deci $x = 1$ este punct unghiular şi prin simetric şi $x = -1$.

2.852A Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ şi $g : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$. Dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală pentru f şi g, $x = 0$ este asimptotă verticală pentru g şi punct de minim pentru f. R. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = e^0 = 1 \Rightarrow y = 1$ asimptotă orizontală. $\lim_{x \to 0} g(x) = e^{\infty} = \infty$, $x = 0$ este asimptotă verticală pentru g. Mai avem $\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3} = \lim_{t \to \infty} 2\frac{t^3}{e^{t^2}} = 0$, $f'(x) < 0$ pentru $x < 0$, $f'(x) > 0$ pentru $x > 0$, deci $x = 0$ este punct de minim pentru f.

2.853A Pentru $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \ln x$, $x = \frac{1}{e}$ este punct de minim şi f este convexă. Într-adevăr, $f'(x) = 1 + \ln x < 0$ pentru $x < \frac{1}{e}$, $f'(x) > 0$ pentru $x > \frac{1}{e}$, $f'(\frac{1}{e}) = 0$ deci $x = \frac{1}{e}$ este punct de minim. Dar $f''(1) = \frac{1}{x} > 0$ deci f este convexă.

2.854A Pentru funcţia $f(x) = x \operatorname{arctg} x$, $y = \pm\frac{\pi}{2}x - 1$ sunt asimptote oblice. $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) \mp \frac{\pi}{2}x) = \lim_{x \to \pm\infty} x(\operatorname{arctg} x \mp \frac{\pi}{2}) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \mp \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -1$, deci $y = \pm\frac{\pi}{2}x - 1$ sunt simptote oblice la $+\infty$ respectiv $-\infty$.

2.855A Punctele de inflexiune ale funcţiei $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$ sunt $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$: $f'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x(1 + x^2)e^{-x^2} = -2x^3e^{-x^2}$, $f''(x) = -6x^2e^{-x^2} + 4x^4e^{-x^2} = 2x^2(2x^2 - 3)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, f'' îşi schimbă semnul în $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ şi $\sqrt{\frac{3}{2}}$ deci $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ sunt puncte de inflexiune.

2.856A Funcţia $f(x) = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$ are punct de inflexiune $x = 0$; $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+x^2}$, $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $f''(0) = 0$ ($f(x) > 0$ cu $x < 0$ şi $f(x) < 0$, $x > 0$).

2.857A Ecuaţia $\frac{|\ln x|}{x} = m$ are trei rădăcini pentru $0 < m < \frac{1}{e}$. Se poate aplica şirul lui Rolle sau intersectăm graficul funcţiei $y = \frac{|\ln x|}{x}$, $x > 0$ cu $y = m$: luăm întâi $y = \frac{\ln x}{x}$ şi pentru $0 < x < 1$ construim simetricul graficului faţă de Ox. $(\frac{\ln x}{x})' = \frac{1-\ln x}{x^2} = 0$ pentru $x = e$. Tabloul de valori

	0		1		e		∞
$f'(x)$	$+$	$+++$	1	$+++$	0	$---$	
$f(x)$	$-\infty$	$\uparrow$	0	$\uparrow$	$\frac{1}{e}$	$\downarrow$	0

Rezultă că pentru $0 < m < \frac{1}{e}$ ecuaţia $\frac{|\ln x|}{x} = m$ are trei rădăcini.

2.858A Să se determine parametrii $a, b \in \mathbf{R}$ pentru care funcţia $f : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{\sqrt{x^2-1}}$ admite asimptotă oblică $y = x + 1$ (la $+\infty$) iar $x = 2$ este punct de extrem. $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2})}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = 1$, $n = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+ax+b-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x(x-\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{ax+b}{\sqrt{x^2-1}}\right) =$
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}(x-\sqrt{x^2-1})} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(a+\frac{b}{x})}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = a = 1$,

$f'(x) = \dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2-1} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}(x^2+x+b)}{x^2-1} = \dfrac{x^3-x(2+b)-1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} = 0$ pentru $x = 2$ deci $8 - 2(2+b) - 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$.

2.859A Ecuaţia $x + \sqrt{x^2+2x} = m$ are soluţii pentru $m \in [-2, -1) \cup [0, \infty)$. Notăm $f(x) = x + \sqrt{x^2+2x}$ domeniul de definiţie $(-\infty, -2] \cup [0, \infty)$; $f(x) > 0$ pentru $x > 0$, $f(x) < 0$, $x < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$
$\lim\limits_{t=-x\to\infty}(\sqrt{t^2-2t} - t) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{-2t}{\sqrt{t^2-2t}+t} = -1$; $f'(x) = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} = \frac{\sqrt{x^2+2x}+x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$; $f'(x) > 0$ pentru $x > 0$ iar pentru $x < 0$ avem $x = -t$, $t > 0$, $\sqrt{t^2-2t} + 1 - t = 0$, $t^2 - 2t = t^2 - 2t + 1$ imposibil, deci $f'(x) < 0$ pentru $x < 0$

x	$-\infty$		-2	0		$+\infty$
$f'(x)$	$---$	$---$	|	|	$+++$	$+++$
$f(x)$	-1	$\downarrow$	-2	0	$\uparrow$	∞

Deci pentru $m \in [-2, -1) \cup [0, \infty)$ ecuaţia are soluţie (o singură soluţie).

2.860A Ecuaţia $\frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x = m$ are soluţii pentru orice $m \in \mathbf{R}$ deoarece $f(x) = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$ are derivata $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+x^2} > 0$ deci f este crescătoare strict de la $-\infty$ la $+\infty$ ($f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = \infty$) şi $y = m$ intersectează graficul lui f într-un singur punct $\forall m \in \mathbf{R}$. Altfel: $\operatorname{Im} f = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

2.861A Să se determine parametrii reali a, b pentru care funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{ax^2+b}{x-1}$ are tangenta la grafic în $x = 2$, dreapta $y = -2x + 13$. R. $y = f(2) = 4a + b = -4 + 13 = 9$ şi $f'(x) = \frac{ax^2-2ax-b}{(x-1)^2}$, $f'(2) = -2 = 4a - 4a + b = b$, deci $b = -2$, $a = \frac{7}{4}$.

2.862A Graficul funcţiei $f(x) = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$ are $x = 0$ punct unghiular şi $y = \pi$ asimptotă orizontală. R. $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \arccos(-1) = \pi$. f este pară, domeniul de definiţie este $\mathbf{R}$ ($-1 \le \frac{1-x^2}{1+x^2} \le 1\ \forall x \in \mathbf{R}$), $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{x}{|x|}$, $f'(x) < 0$ pentru $x < 0$, $f'(x) > 0$ pentru $x > 0$, $f'_s(0) = -2$, $f'_d(0) = 2$ deci $x = 0$ este punct unghiular.

2.863A Funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ are un singur punct de inflexiune, $x = 0$; $f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$, $f''(x) = \frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}$, $f''(0) = 0$, $f''(x) < 0$ pentru $x \in (-1, 0)$ şi $f''(x) > 0$ pentru $x \in (0, 1)$ deci $x = 0$ este punct de inflexiune, unic.

2.864A Funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x - \ln(1+x)$ este crescătoare pe $(0, \infty)$ deoarece $f'(x) = e^x - \frac{1}{1+x} > 0$ pe $(0, \infty)$ ($e^x > \frac{1}{x+1}$ se observă grafic comparând $y = e^x$ cu $y = \frac{1}{1+x}$).

2.865A $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ este crescătoare pe orice interval care nu conţine pe 0, deoarece $f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2} > 0$ deci f este crescătoare pe $(-\infty, 0)$ şi pe $(0, \infty)$, deci şi pe orice interval $I \subset (-\infty, 0)$ sau $I \subset (0, \infty)$.

2.866A Funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ este descrescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty, 1), (1, \infty)$ deoarece $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0$, $x \ne 1$.

2.867A Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - x - \ln x$ este strict crescătoare pe $(1, \infty)$: $f'(x) = \frac{2x^2-x-1}{x}$, $2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ deci pe $(1, \infty)$, $f'(x) > 0$ şi f este strict crescătoare.

2.868A Funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = xe^{\frac{x^2+1}{x}}$ este strict descrescătoare pe intervalele $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ şi $\left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ deoarece $f'(x) = e^{\frac{x^2+1}{x}} \frac{x^2+x-1}{x}$ şi $g(x) = \frac{x^2+x-1}{x} < 0$ pe cele două intervale.

2.869A Mulţimea valorilor funcţiei $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}$ este intervalul $[-\frac{1}{3}, 5]$: $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}$, $y = 1$ asimptotă orizontală, $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}$, $f'(-1) = f'(1) = 0$, $x = -1$ este punct de minim, $f(-1) = -\frac{1}{3}$, $x = 1$ este punct de maxim, $f(1) = 5$, deci $\operatorname{Im} f$ care este proiecţia graficului pe Oy este intervalul $[-\frac{1}{3}, 5]$. Altfel, pentru $\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1} = y$, $x^2(1-y) + x(3+y) + 1 - y = 0$, $\Delta_y = (y+3)^2 - 4(1-y^2) \ge 0 \Rightarrow y \in [-\frac{1}{3}, 5]$.

2.870A Fie $f : [1, \sqrt{e}) \to I$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Găsiţi pe I astfel încât f să fie inversabilă. De fapt se cere imaginea lui $[1, \sqrt{e})$ (mulţimea valorilor) funcţiei f. Deoarece $f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$, pe intervalul $[1, \sqrt{e}]$ f este crescătoare ($f'(x) > 0$ pe $[1, \sqrt{e}]$, $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$, $f(1) = 0$ deci $I = [0, \frac{1}{2e}]$.

2.871A Abscisele punctelor de extrem ale funcţiei $f(x) = x^3 - 3x$ sunt evident $x = \pm 1$ deoarece $f'(x) = 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ iar f' îşi schimbă semnul în ± 1.
2.872A Mulţimea maximală pe care $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ este convexă este $(0, \infty)$ deoarece $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ pentru $x > 0$.
2.873A Asimptotele funcţiei $f(x) = \sqrt{\frac{x^6+x}{x^4+1}}$ sunt $y = x$ la $+\infty$ şi $y = -x$ la $-\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{x^5}}{1+\frac{1}{x^4}}} = \pm 1 = m$; $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{\frac{x^6+x}{x^4+1}} \mp x\right) =$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^6+x}{x^4+1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^6+x}{x^4+1}} \pm x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - x^2}{(x^4+1)\left(\sqrt{\frac{x^6+x}{x^4+1}} \pm x\right)} = 0.$$

2.874A Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{ax^2+1}{x^2+b^2}$. Să se găsească toate perechile (a, b) astfel încât graficul funcţiei să treacă prin punctul $(1, 1)$ iar valoarea minimă să fie $\frac{1}{4}$. $1 = \frac{a+1}{1+b^2} \Rightarrow b^2 = a$, $f'(x) = \left(\frac{ax^2+1}{x^2+a}\right)' = \frac{2x(a^2-1)}{(x^2+a)^2} = 0 \Rightarrow$ $x = 0$ şi $f(0) = \frac{1}{4} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = 4$, $b = \pm 2$, deci $(4, 2), (4, -2)$.
2.875A Să se determine punctul x_0 şi ecuaţia tangentei în x_0 astfel încât graficele funcţiilor $f, g : (-1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(1 + x)$, $g(x) = x^2 + x$ admit aceeaşi tangentă în acelaşi punct x_0. $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $g'(x) = 2x + 1$, $\frac{1}{1+x} = 2x + 1$, $2x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x_0 = 0$, $x_0 = -\frac{3}{2} \notin (-1, \infty)$, $f'(0) = g'(0) = 1$, $f(0) = g(0) = 0$ deci $y = x$ este tangenta comună în punctul comun (0,0).
2.876A Să se determine m astfel încât graficele funcţiilor $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = 2x^2 - 2(m+3)x + m^2$ să fie tangente. $f'(x) = 2x - 4$, $g'(x) = 4x - 2(m+3)$, $g'(x) = f'(x) \Rightarrow 2x - 4 = 4x - 2(m+3)$ deci $x = m + 1$. În $x = m + 1$, pantele sunt egale şi mai trebuie $f(m+1) = g(m+1)$: $(m+1)^2 - 4(m+1) + 3 = 2(m+1)^2 - 2(m+3)(m+1) + m^2 \Rightarrow m = -2$.
2.877A Câte asimptote are funcţia $f(x) = \frac{x^6}{(x^2-1)(x^2+1)(x^2-4x+3)}$? $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ asimptotă orizontală iar $x_{1,2} = \pm 1$, $x_3 = 3$ sunt asimptote verticale, deci patru asimptote.
2.878A Determinaţi $A = \{a \in \mathbf{R} |$ graficul funcţiei $f(x) = \frac{ax^3+x^2}{x^2+a}$ are asimptote oblice şi verticale$\}$. R. Asimptota oblică $y = mx + n$, $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - ax}{x^2 + a} = 1$. Avem asimptote verticale dacă $a < 0$. $A = (-\infty, 0)$.
2.879A Se cere numărul n al punctelor de inflexiune ale funcţiei $f : (-\pi, \pi)$, $f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$. R. $f'(x) = \cos x + \cos 3x$, $f''(x) = -\sin x - 3\sin 3x = \sin x(12\sin^2 x - 10) = 0 \Rightarrow \sin x = 0$, $\sin x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$, deci $x_1 = 0$, $x_{2,3} =$

$\pm \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}$, $x_{4,5} = \pm\pi \mp \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}$, deci $n = 5$.
2.880A Punctul $x_0 = 1$ este pentru funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ punct unghiular: $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|}$; $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$, $x \in [0, 1)$, $f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}$, $x \in (1, \infty)$ şi nu există pentru $x = 1$, $f'_s(1) = 1$, $f'_d(1) = -1$, deci $x_0 = 1$ este punct unghiular.
2.881A Să se determine o funcţie de forma $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ astfel încât tangenta la grafic în punctul de abscisă $x = 1$ să fie paralelă cu prima bisectoare şi graficul ei să admită dreptele $y = 3$ şi $x = -1$ ca asimptote. R. Fie $f(x) = m\frac{x+a}{x+b}$, $y = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = m = 3$, $x = -1$ asimptotă verticală implică $b = 1$ iar $f'(x) = \frac{3(1-a)}{(x+1)^2}$, $f'(x) = \frac{3(1-a)}{4} = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$, $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$.
2.882A Fie $f : (-\infty, -1) \cup [1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}}$, $a, b \in \mathbf{R}$. Dacă $y = -x + 1$ este asimptotă oblică spre $-\infty$, determinaţi $\lambda = m + n$, unde $y = mx + n$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax - bx\sqrt{\frac{x-1}{x+1}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}{x} = a - b = -1,$$

$$1 = \lim_{x\to-\infty} \left((a+1)x + (a+1)\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}}\right) = (a+1)\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}} + x\right) =$$

$$(a+1)\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3-1}{x+1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}} - x} = (a+1)\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2-1}{-x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}+1\right)(x+1)} =$$

$$\frac{a+1}{2} = 1 \Rightarrow a = 1,\ b = 2;\ m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x + 2x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}{x} = 3,$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x\to+\infty} 2\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}} - x\right) = 2\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3-1}{x+1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}} + x} =$$

$$2\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2-1}{(x+1)\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}} + x\right)} = -1 \text{ deci } m + n = 3 - 1 = 2.$$

2.883B Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel ca graficul funcţiei $f(x) = \frac{x^2+1}{ax^2+bx}$ trece prin $M(1, 1)$ şi în $x = 1$ are panta tangentei $\frac{1}{2}$. $1 = f(1) = \frac{2}{a+b} \Rightarrow$ $a + b = 2$; $f'(x) = \frac{bx^2-2ax-b}{(ax^2+bx)^2}$, $f'(1) = \frac{-2a}{(a+b)^2} = -\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$, $a = -1$, $b = 3$.
2.884B Tangenta la graficul lui $f(x) = \frac{x^3+3}{x}$, $x \neq 0$ în $x = -2$ taie a doua oară graficul în P. Se cere panta tangentei în P la grafic. R. $f(-2) = \frac{5}{2}$, $f'(-2) = \frac{2x^3-3}{x^2}\Big|_{x=-2} = -\frac{19}{4}$, dreapta $y - \frac{5}{2} = -\frac{19}{4}(x + 2)$, $y = -7 - \frac{19}{4}x$ o intersectăm cu graficul lui f, $x^3 + 3 = -7x - \frac{19}{4}x^2$, $4x^3 + 19x^2 + 28x + 12 = 0$,

$x_0 = -2$ rădăcini dublă, $x_1 = -\frac{3}{4}$, $m = -\frac{41}{5} = f'(-\frac{3}{4})$.

2.885B Fie $f:(0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x\ln x$. Dacă $M = \{x_0 \in (0,\infty) |$ dreapta tangentă la graficul lui f în x_0 trece prin $A(2,1)\}$, se cere $S = \sum_{x_0 \in M} x_0$. R. Unul din punctele x_0 este, evident, $x_0 = 1$, $f'(x_0) = f'(1) = 1 + \ln 1 = 1$, $y = x - 1$ trece prin $A(2,1)$. Cealaltă dreaptă tangentă este $y - 1 = (1+\ln x_0)(x-2)$ şi avem evident $1 + (1+\ln x_0)(x_0 - 2) = x_0 \ln x_0$ deci $x_0 = 2\ln x_0 + 1$. Folosind semnul funcţiei $g(x) = 2\ln x + 1 - x$, observăm că $g(3) = 2\ln 3 - 2 > 0$, $g(4) = 2\ln 4 - 3 < 0$ deci $x_0 \in (3,4)$, iar $S =\in (4,5)$.

2.886B Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, $g: \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x + 1 - \frac{1}{ax}$ şi A mulţimea acelor $a \neq 0$ pentru care graficele celor două funcţii admit o tangentă comună într-un punct comun. Se cere A. R. Condiţiile se scriu: $x^2 = x + 1 - \frac{1}{ax}$, $2x = 1 + \frac{1}{ax^2}$ sau $ax^3 - ax^2 - ax + 1 = 0$, $2ax^3 - ax^2 - 1 = 0$. Se observă că $a = 1$ este o soluţie şi rezultă $x = 1$. Prin verificări directe pe fiecare punct din grilă rezultă şi $a = -\frac{27}{5}$, $x = -\frac{1}{3}$. Altfel: $-2(ax^3 - ax^2 - ax + 1) + 2ax^3 - ax^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{x^2+2x}$, $x \neq 0$ şi înlocuim în $a(2x^3 - x^2) - 1 = 0$; rezultă $6x^2 - 4x - 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $a = -\frac{27}{5}$.

2.887B $f:(0,\infty)$, $f(x) = \ln(x + \frac{1}{x}) + \frac{x^2-1}{x^2+1}$ are un singur punct de inflexiune: $f''(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(1+x^2)^3} + \frac{-x^4+4x^2+1}{(1+x^2)^2x^2} = \frac{-x^6-9x^4+9x^2+1}{x^2(x^2+1)^3}$ ecuaţia $-x^6 - 9x^4 + 9x^2 + 1 = 0$ are numai o rădăcină reală pozitivă $(x^2-1)(x^4+10x^2+1) = 0$, $x^2 = 1$, $(x^2)_{1,2} = -5 \pm \sqrt{24}$, deci numai $x_1 = 1$ este reală şi pozitivă.

2.888B Fie M mulţimea perechilor $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ pentru care dreapta $y = 2x + 3$ este asimptotă oblică la graficul lui $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = a\sqrt{x^2 + bx}$. Se cere

$$S = \sum_{(a,b)\in M} (a+b);\ m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a|x|\sqrt{1+\frac{b}{x}}}{x} = \begin{cases} a, & +\infty \\ -a, & -\infty \end{cases},$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} a(\sqrt{x^2+bx} - x) = a\lim_{x\to\infty} \frac{bx}{\sqrt{x^2+bx}+x} = \frac{ab}{2},$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} a(\sqrt{x^2+bx}+x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{bx}{\sqrt{x^2+bx}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{abx}{-x(\sqrt{1+\frac{b}{x}}+1)} =$$

$-\dfrac{ab}{2}$. Rezultă $a = 2$, $b = 3$ şi $a = -2$, $b = 3$ deci $\sum_{(a,b)\in M} (a+b) = 6$.

2.889B Fie şirul de funcţii $f_n: \mathbf{R}\setminus\{-1,0\}$, $n \geq 1$, $f_n(x) = \frac{(x^{2n}+1)(\sqrt{x^2+x+1}-x)}{x^{2n}+x}$ şi $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Atunci f admite toate cele trei tipuri de asimptote. R. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{x}, & x \neq 0, |x| < 1 \\ \sqrt{x^2+x+1} - x, & |x| > 1 \end{cases}$ (deoarece $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = \begin{cases} \infty, & |x| > 1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$). Avem $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1} - x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{1}{2}$, deci $y = \frac{1}{2}$ este asimptotă orizontală la $+\infty$.

$$m = \lim_{n\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{x} = \lim_{n\to-\infty} \frac{-x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)}{x} = -2;$$

$$n = \lim_{n\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x) = \lim_{n\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = -\frac{1}{2},\ \text{deci}$$

$y = -2x - \frac{1}{2}$ este asimptotă oblică la $-\infty$; $x = 0$ este asimptotă verticală.

2.890B Funcţia $f: \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} |x|^x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ are două puncte de extrem $x = \frac{1}{e}$ şi $x = -\frac{1}{e}$; pentru $x > 0$ $f(x) = x^x$, $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$ deci $x = \frac{1}{e}$ este punct de extrem; dacă $x < 0$ notăm $x = -t$, $t > 0$, $g(t) = t^{-t}$, $g'(t) = t^{-t}(-1 - \ln t)$, deci $t = \frac{1}{e} = -x$ este punct de extrem.

2.891B Pentru funcţia $g(x) = |4x^3 - 3x + 1|$, punctele $x_1 = -1$ punct unghiular, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$ sunt puncte de maxim respectiv minim: $f(x) = |(x+1)(2x-1)^2| = \begin{cases} (x+1)(2x-1)^2, & x \geq -1 \\ -(x+1)(2x-1)^2, & x < -1 \end{cases}$, $f'(x) = 3(4x^2-1)$, $x > -1$, $f'(x) = -3(4x^2-1)$, $x < -1$, nu există în $x = -1$.

Tabloul de valori:

	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		∞
f'	$-$	$- - -$	$-9 \mid 9$	$+ +$	0	$--$	$--$	$--$	0	$+ +$	
f	$+\infty$	$\downarrow$	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	1	$\downarrow$	0	$\uparrow$	$+\infty$

Altfel, mai uşor, putem construi graficul funcţiei $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$ şi luăm simetricul graficului faţă de Ox acolo unde $f(x) < 0$, deci $x < -1$.

2.892B Mulţimea valorilor funcţiei $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$ este $[0, e^{\frac{1}{e}}]$: $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}} = 0$ $(0^\infty = 0)$, $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$ $(n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n} \to 1)$, $f'(x) = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$; $x = e$ este punct de maxim cu $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$, $y = 1$ asimptotă orizontală, deci imaginea funcţiei f este $[0, e^{\frac{1}{e}}]$.

2.893B Asimptotele oblice ale curbei $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}\ln(1+|x|)$: $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(1+|x|)}{x^2} = \frac{1}{2}$, $n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(1+|x|)}{x} = 0$, deci avem o singură asimptotă şi la $+\infty$ şi la $-\infty$, $y = \frac{x}{2}$.

2.894B Să se arate că $f \geq g$ dacă $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$, $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$.

Dezvoltarea în serie a lui $\operatorname{ch}x$ este $\operatorname{ch}x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\ldots$ deci evident $\operatorname{ch}x \geq 1+\frac{x^2}{2}$, $f \geq g$. Altfel, notăm $h(x) = f(x)-g(x)$, $h(0)=0$, $h'(x) = \operatorname{sh}x - x = \varphi(x)$, $\varphi'(x) = \operatorname{ch}x - 1 \geq 0$, $\varphi(0) = 0$ deci φ este crescătoare, $\varphi(x) < 0$ pentru $x < 0$ şi $\varphi(x) > 0$ pentru $x > 0$ deci h descreşte pentru $x < 0$ şi creşte pentru $x > 0$, deci $h \geq 0$.

2.895B Determinaţi intervalul pe care $f(x) = x^2+\frac{8}{x}$, $x \neq 0$ este concavă; $f'(x) = 2x - \frac{8}{x^2}$, $f''(x) = 2+\frac{16}{x^3} = 2\cdot\frac{x+2}{x}\cdot\frac{x^2-2x+4}{x^2}$ deci $f'' \leq 0$ pe $[-2,0)$.

2.896B Să se determine mulţimea maximală la care restricţia funcţiei $f(x) = \sqrt{|x+2|-x}$ este inversabilă şi să se determine inversa ei. $y = f(x) = \sqrt{|x+2|-x} = \begin{cases} \sqrt{2}, & x+2 \geq 0, x \geq -2 \\ \sqrt{-2x-2}, & x+2<0, x<-2 \end{cases}$ deci f este injectivă pe $(-\infty,-2]$ unde este inversabilă şi $y = \sqrt{-2x-2} \Rightarrow x = -1-\frac{y^2}{2}$, deci inversa lui f este $f^{-1}(x) = -1-\frac{x^2}{2}$.

2.897B Intervalele de convexitate ale funcţiei $f:[0,2\pi]$, $f(x) = x+\sin^2\frac{x}{2}$; $f'(x) = 1+\frac{\sin x}{2}$, $f''(x) = \frac{\cos x}{2}$, $\cos x > 0$ pentru $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ şi $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

2.898B Graficul funcţiei $f(x) = \sqrt[3]{\alpha x^3+\beta x^2}$ admite asimptotă oblică $y = 2x-\frac{1}{6}$. Care sunt valorile lui α şi β? $2 = m = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{\alpha x^3+\beta x^2}{x^3}} = \sqrt[3]{\alpha}$ deci $\alpha = 8$. $-\frac{1}{6} = n = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{8x^3+\beta x^2}-2x) = 2\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+\frac{\beta}{8}x^2}-x\right) = 2\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{\beta}{8}x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+\frac{\beta}{8}x^2\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x^3+\frac{\beta}{8}x^2\right)x^3}+\sqrt[3]{(x^3)^2}} = \frac{2\beta}{24} = -\frac{1}{6}$ deci $\beta = -2$. Rezultă $\alpha = 8$ şi $\beta = -2$.

2.899B Să se afle valorile lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care graficul lui $f(x) = \frac{e^x-(m+1)e^{-x}}{e^x-1}$ intersectează axa Ox. Condiţia $me^x-(m+1)e^{-x} = 0$ înseamnă $e^{2x} = \frac{m+1}{m} > 0$, $m \in (-\infty,-1)\cup(0,\infty)$ sau altfel $n = \frac{1}{m} = e^{2x}-1 > -1$, $-1 < n < 0$, $0 < n$, deci $-1 < \frac{1}{m} < 0$, $0 < \frac{1}{m} \Rightarrow m \in (-\infty,-1)\cup(0,\infty)$.

2.900B Funcţia $f(x) = x+\frac{\ln x}{x}$, $x > 0$ are 2 asimptote: $x = 0$ asimptotă verticală, $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\dfrac{\ln x}{x}\right) = -\infty$ şi $y = x$ asimptotă oblică la $+\infty$, $m_1 = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2} = 1$, $n_1 = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$. Deoarece $f'(x) = \frac{x^2+1-\ln x}{x^2} > 0$ nu avem extreme deci $n = 2$, $m = 0$.

2.901B Fie $f, g : D \to \mathbf{R}$ două funcţii derivabile şi $A = \{\alpha, \alpha \in D, f(\alpha) = g(\alpha)\}$, $B = \{\alpha, \alpha \in D, f'(\alpha) = g'(\alpha)\}$ şi $C = A\cap B$. Atunci A înseamnă că f coincide cu g în α, B înseamnă că în α tangentele la grafic sunt paralele, iar C înseamnă că f şi g au tangentă comună în α.

2.902B $f(x) = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ are numai asimptote oblice: f este pară, $\sqrt{x^2+1} \neq 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ deci nu avem asimptote verticale şi nici orizontale, $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2(1+\frac{2}{x^2})}{x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \pm 1$, $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)\mp x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2\mp x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-x^2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}(x^2\pm x\sqrt{x^2+1})} + \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} = 0$.

2.903B Asimptotele graficului funcţiei $f(x) = x-x^2\ln\frac{1+x}{x}$, $x \in (-\infty,-1)\cup(0,\infty)$: $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\left(x-x^2\ln\dfrac{1+x}{x}\right) = -1-\ln(+0) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{t=\frac{1}{x}\to\pm 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}$, deci $x = -1$ este asimptotă verticală, iar $y = \frac{1}{2}$ orizontală.

2.904B Asimpotele funcţiei $f : \mathbf{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x(x-1)}$ sunt $x = 1$ asimptotă verticală $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ asimptotă orizontală.

2.905B Funcţia $f : (-\infty,-3)\cup[0,\infty)$, $f(x) = 1-x+\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$ admite o asimptotă oblică, una verticală şi una orizontală: $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \infty$ $(x < -3)$, deci $x = -3$ este asimptotă verticală; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1+\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+3}}-1\right) = 1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(\frac{x}{x+3}-1\right)}{\sqrt{\frac{x}{x+3}}+1} = 1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{-3x}{x+3}}{\sqrt{\frac{x}{x+3}}+1} = 1-\dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ este asimptotă orizontală; $m = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x-x\sqrt{\frac{x}{x+3}}}{x} = -2$, $n = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+2x\right) = 1+\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1-\sqrt{\dfrac{x}{x+3}}\right) = 1+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{3x}{x+3}}{1+\sqrt{\frac{x}{x+3}}}$ deci $y = -2x+\frac{5}{2}$ este asimptotă oblică .

2.906B Pe graficul funcţiei $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ să se determine un punct $A(a,b)$ în care tangenta să fie paralelă cu dreapta ce trece prin $M(1,1)$ şi $N\left(2,\frac{1}{2}\right)$. R. Panta dreptei este $m = \frac{1-\frac{1}{2}}{1-2} = -\frac{1}{2}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2}$, $x^2 = 2$, $x = \sqrt{2}$ deci punctul A este $A\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2.907C Fie $f : [0,2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1] \\ ax-1, & x \in (1,2] \end{cases}$. Atunci f este injectivă $\Leftrightarrow a \geq 2$. f este injectivă dacă $a > 0$ şi $f(x) \geq 1$ pentru $x > 1$, $\lim\limits_{x\to 1}(ax-1) = a-1 \geq 1$ deci $a \geq 2$. Dacă $f([0,2]) = [0,2]$, este necesar ca

$a>0$, $g(x)=ax-1$ crescătoare $g(2)=2a-1=2$, $a=\frac{3}{2}$ şi condiţia $a\geq 2$ nu este verificată.

2.908C Să se calculeze $\mathrm{Im}f$ dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2\mathrm{arctg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$. Se ştie că $-\frac{\pi}{2}<\mathrm{arctg}x<\frac{\pi}{2}$ şi $-\frac{\pi}{2}\leq\arcsin x\leq\frac{\pi}{2}$; dar $-1\leq\frac{2x}{1+x^2}\leq 1$ deci $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ îşi ia toate valorile. Avem $f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{|1-x^2|}$; $f'(x)=0$ dacă $|x|>1$ şi nu există în $x=\pm1$. $f'(x)=\frac{4}{1+x^2}$, dacă $|x|<1$, $f(x)=-\pi=f(-1)$ iar Deci f este constantă pentru $x\leq-1$ şi anume pentru $x\geq1$ este tot constantă şi ia valoarea $\pi=f(1)\cdot f'(x)=\frac{4}{1+x^2}>0$ pe $(-1,1)$ deci este crescătoare şi ia valorile $(-\pi,\pi)$. Dar f este continuă deci $\mathrm{Im}f=[-\pi,\pi]$.

2.909C Fie $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{\alpha}-\alpha x+\alpha-1$. Pentru ce $\alpha\in\mathbf{R}$ avem $f(x)\geq0$, $\forall x>0$? În [14], pag. 207 se arată că pentru $\alpha\in(0,1)$, $x^{\alpha}-\alpha x\leq1-\alpha$, $x>0$ ($\varphi(x)=x^{\alpha}-\alpha x$, $\varphi'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1)$, $\varphi'(1)=0$, $\varphi'(x)>0$ pentru $x<1$, $\varphi'(x)<0$ pentru $x>1$, deci $x=1$ este punct de maxim pentru $\varphi(x)$ şi $\varphi(1)=1-\alpha\geq x^{\alpha}-\alpha x$). Din aceasta rezultă că $f(x)\geq0$ pentru $\alpha\in(-\infty,0]\cup[1,\infty)$.

2.910C Să se determine $A=\{m\in\mathbf{R}, f$ are cel puţin un punct de inflexiune$\}$ dacă $f(x)=e^x+mx^3$, $x\in\mathbf{R}$. R. $g(x)=f''(x)=e^x+6mx$, $g(x)=0$ are cel puţin o rădăcină şi îşi schimbă şi semnul dacă $m\in(-\infty,-\frac{e}{6})\cup(0,\infty)$. Se observă grafic că dreapta $y=ex$ şi $y=e^x$ sunt tangente în $x=e$, deci $y=ax$ se intersectează cu $y=e^x$ în două puncte dacă $e<a<\infty\Rightarrow e<-6m<\infty$ sau $m<-\frac{e}{6}$. Evident că $y=ax$ intersectează pe $y=e^x$ dacă $a<0$, deci $-6m<0$, $m>0$.

2.911C Pentru fiecare $n\in\mathbf{N}$, $n>1$ considerăm funcţia $f:(0,\frac{\pi}{2})\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sin^n x$. Există un punct $x_n\in(0,\frac{\pi}{2})$ astfel încât f este convexă pe $(0,x_n)$ şi concavă pe $(x_n,\frac{\pi}{2})$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$. R. $f''(x)=n\sin^{n-2}x[(n-1)-n\sin^2x]=0\Rightarrow\sin x=\sqrt{1-\frac{1}{n}}$; $x_n=\arcsin\sqrt{1-\frac{1}{n}}$ de unde $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\arcsin\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}=\arcsin\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}=\arcsin1=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

2.912C Punctele de inflexiune ale funcţiei $f(x)=(1+x)e^{-|1-x|}$.

R. $f(x)=\begin{cases}(1+x)e^{x-1}, & x\leq1\\ (1+x)e^{1-x}, & x>1\end{cases}$; $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{e}(x+2)e^{x}, & x<1\\ -exe^{-x}, & x>1\end{cases}$; $f''(x)=\begin{cases}\frac{1}{e}(x+3)e^{x}, & x<1\\ e(x-1)e^{-x}, & x>1\end{cases}$ deci punctul de inflexiune este $x=-3$.

2.913C Fie $f(x)=\min(\ln|x|,x+1)$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Să se afle intervalele

maximale pe care funcţia este convexă.

$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leq-1\\ \ln|x|, & -1<x, x\neq0\end{cases}$; $f''(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ -\frac{1}{x^2}, & -1<x, x\neq0\end{cases}$ $f''(x)$ nu există în, $x=-1$ şi $x=0$, deci este convexă pentru $x\leq-1$.

2.914C Aflaţi cea mai mică constantă λ astfel încât $\ln(1+e^t)<\lambda+t$, $\forall t\in(0,\infty)$. R. Făcând graficele funcţiilor $f(x)=\ln(1+e^x)$, $g(x)=x+\ln2$, $x>0$, observăm că $y=x$ este asimptotă oblică la $+\infty$ pentru f, deci paralelă cu graficul lui g (dreapta $y=x+\ln2$) $f(x)$ este convexă ($f''(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}>0$) $f(0)=\ln2=g(0)$, $g(x)\leq f(x)$ de unde rezultă $\lambda=\sqrt{2}$. Altfel: determinăm extremele funcţiei $f(t)=\ln(1+e^t)-t$: $\lim\limits_{t\to0}f(t)=\ln2$, $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=0$, $f'(t)=-\frac{1}{1+e^t}<0$, f descreşte, $\sup\limits_{t}f(t)=\ln2$, $\lambda=\ln2$.

2.915C Fie $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ şi fie $x_k\in\mathbf{R}$ valoarea lui x din intervalul $\left[\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)^{-1},\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{-1}\right]$, $k\in\mathbf{Z}$ pentru care are loc formula lui Lagrange. Fie $l=\lim\limits_{k\to\infty}f'(x_k)$. Se cere l. Lagrange se scrie $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{-2}+\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)^{-2}=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{-1}-\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)^{-1}\left[2x_k\sin\frac{1}{x_k}-\cos\frac{1}{x_k}\right]$ sau $\pi f'(x_k)=\frac{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}+\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\pi\cdot f'(x_k)=2$, $\lim\limits_{k\to\infty}f'(x_k)=\dfrac{2}{\pi}$.

2.916C Fie $f:\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$. Se cere domeniul pe care f este convexă. R. $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$, $f'(x)=2\left(-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{(x+1)^3}\right)$, $f''=3\cdot2\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{(x+1)^4}\right)=6\frac{4x^3+6x^2+4x+1}{x^4(x+1)^4}=6\cdot\frac{(4x^3+2x^2)+(4x^2+2x)+(2x+1)}{x^4(x+1)^4}=6\cdot\frac{(2x+1)(2x^2+2x+1)}{x^4(x+1)^4}>0$ pentru $x>-\frac{1}{2}$, $x\neq0$, deci $x\in(-\frac{1}{2},\infty)\setminus\{0\}$.

2.917C Să se determine punctele de inflexiune ale funcţiei $f(x)=\int_1^x(3\ln t+t^2-5t-3-e^2+5e)dt$. R. Se ştie că $f(x)=\int_a^x g(t)dt$, g continuă $\Rightarrow f'(x)=g(x)$, deci $f'(x)=3\ln x+x^2-5x-3-e^2+5e$, $x>0$, $f''(x)=\frac{3}{x}+2x-5=\frac{2x^2-5x+3}{x}$, punctele de inflexiune sunt $x_1=1$, $x_2=\frac{3}{2}$.

2.918C Să se determine numărul n, al asimptotelor la graficul lui f şi m numărul soluţiilor ecuaţiei $f(x)=0$, dacă $f(x)=\ln(e^{2x}-4e^x+3)$. Rădăcinile ecuaţiei $\ln(e^{2x}-4e^x+3)=0$: $e^{2x}-4e^x+3=1$, $t^2-4t+2=0$ ($t=e^x$), $t_{1,2}=2\pm\sqrt{2}$, $x_1=\ln(2+\sqrt{2})$, $x_2=\ln(2-\sqrt{2})$, deci $m=2$. Asimptota orizontală la $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^{2x}-4e^x+3)=\ln3$, deci $y=\ln3$. Din ecuaţia $e^{2x}-4e^x+3=0$ $(e^x)_{1,2}=1;3$ rezultă asimptotele verticale

$x = 0$ şi $x = \ln 3$.

$m^* = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x + \ln(1 - 4e^{-x} + 3e^{-2x})}{x} = 2,$

$n^* = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 - 4e^{-x} + 3e^{-2x}) = 0,$ Prin urmare $n = 4$ şi $m = 2$.

$y = 2x$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

2.919C Asimptotele funcţiei $f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2+2x+4}}$; asimptota verticală $x - \sqrt{x^2 + 2x + 4} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$, $x = -2$ nu verifică, nu avem asimptotă verticală. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{-x=t\to\infty} \dfrac{-1}{t + \sqrt{t^2 - 2t + 4}} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 2x + 4}}{-2x - 4} = \dfrac{2}{-2} = -1$, deci $y = 0$ şi $y = -1$ sunt asimptote orizontale.

2.920C $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - a}$ are două extreme locale dacă şi numai dacă $a > 1$: $f'(x) = \frac{e^x(x+1)(e^x-a) - xe^{2x}}{(e^x-a)^2} = \frac{e^x(e^x - ax - a)}{(e^x-a)^2}$; utilizăm metoda grafică separând pe a, $a = \frac{e^x}{x+1}$, intersectăm $y = a$ cu $y = \frac{e^x}{x+1}$ şi rezultă pe grafic că ecuaţia $e^x - ax - a = 0$ are două rădăcini dacă şi numai dacă $a > 1$.

2.7. Primitive

2.921A $F(x) = \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \mathrm{tg}^2 x) d(\mathrm{tg} x) = \mathrm{tg} x + \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + C.$

2.922A $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{\ln x} + C.$

2.923A $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \cos x} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -\mathrm{ctg}\frac{x}{2} + C.$

2.924A $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{-2x} + 1}} = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 + (e^x)^2}} = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}) + C.$

2.925A $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2 + 1}dx = \frac{1}{2}\int [(x^2 + 1) - 1]\sqrt{x^2 + 1}d(x^2 + 1) =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right] + C = \frac{1}{5}\sqrt{(x^2 + 1)^5} - \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + 1)^3} + C.$

2.926A Deoarece $(\ln(x + \sqrt{1 + x^2}))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ rezultă $\displaystyle\int \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} dx =$ $\displaystyle\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) d(\ln(x + \sqrt{1 + x^2})) = \frac{1}{2}(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))^2 + C.$

2.927A $x > 0 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1 + x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1 + x}} = \int \frac{2d(\sqrt{x})}{\sqrt{1 + (\sqrt{x})^2}} =$

$= 2\ln(\sqrt{x} + \sqrt{1 + x}) + C.$

2.928A $\displaystyle\int \frac{(\mathrm{arctg} x)^2}{1 + x^2} dx = \int (\mathrm{arctg} x)^2 d(\mathrm{arctg} x) = \frac{1}{3}(\mathrm{arctg} x)^3 + C.$

2.929A $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} = \int \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2^2} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$

$= \displaystyle\int \frac{d(\mathrm{tg} x)}{2^2 + (\mathrm{tg} x)^2} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg} x}{2} + C.$

2.930A $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2} = -\frac{1}{\arcsin x} + C.$

2.931A Deoarece $x > 0$, $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -\int \frac{d(\frac{1}{x})}{\sqrt{1 + (\frac{1}{x})^2}} =$

$= -\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) + C.$

2.932A $x > 0 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{(1 + \frac{1}{x^2})^3}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(\frac{1}{x^2} + 1)}{\sqrt{(1 + \frac{1}{x^2})^3}} =$

$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+\frac{1}{x^2})^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$

2.933A $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{x}} = \int \frac{2d(\sqrt{x})}{1 + (\sqrt{x})^2} = 2\mathrm{arctg}\sqrt{x} + C.$

2.934A $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$

$= \mathrm{tg} x - \mathrm{ctg} x + C.$

2.935A $\int \frac{x dx}{x^4 - 2x^2 - 1} = \int \frac{x dx}{(x^2-1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \int \frac{x dx}{[x^2 - (1+\sqrt{2})][x^2 + (\sqrt{2}-1)]} =$

$= \displaystyle\int \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x^2 - (1+\sqrt{2})} - \frac{1}{x^2 + (\sqrt{2}-1)}\right) d(x^2) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2 - (\sqrt{2} + 1)}{x^2 + (\sqrt{2} - 1)}\right| + C.$

2.936A $\displaystyle\int \sqrt{\frac{e^x + 1}{e^x - 1}}dx = \int \frac{e^x + 1}{\sqrt{(e^x)^2 - 1}}dx = \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{(e^x)^2 - 1}} - \int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1 - (e^{-x})^2}}$

$= \ln|e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}| - \arcsin e^{-x} + C$ $(x > 0)$.

2.937A $F(x) = \ln\sqrt{4 + x^2}$ este o primitivă a funcţiei $f(x) = \frac{x+a}{4+x^2}$ dacă $a = 0$ deoarece $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{x}{4+x^2}$.

2.938A O primitivă a funcţiei $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \le 0 \\ 3x^2, & x > 0 \end{cases}$ este $F(x) =$ $\begin{cases} e^x(x - 1) + 1 \\ x^3 \end{cases}$; $F(x) = \begin{cases} e^x(x - 1) + C \\ x^3 + C_1 \end{cases}$ unde $C_1 = C - 1$ şi luăm $C_1 = 0$.

2.939A $I=\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx\ \left(x\in(\frac{\pi}{2},0)\right)=\int\frac{(1-\sin^2 x)(\sin x)'}{\sin x}dx=$
$=\ln|\sin x|-\frac{\sin^2 x}{2}+k=\ln\sin(-x)+\frac{\cos^2 x}{2}+C\ (C=k-\frac12))$

2.940A $\int \sin x\sin 2x dx = 2\int \sin^2 x(\sin x)'dx=\frac23\sin^3x+C.$

2.941A $\int\frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)}=\int\frac{\ln x d(\ln x)}{1-\ln^2 x}=-\frac12\int\frac{d(1-\ln^2x)}{1-\ln^2x}=-\frac12\ln(1-\ln^2x)+C=\frac12\ln\frac{1}{1-\ln^2x}+C\ (x\in(e^{-1},e)\Rightarrow -1<\ln x<1).$

2.942A $x\in(-1,0)$, $\int\frac{x^2-3}{x^3-x}dx=\int\left(\frac3x-\frac1{x-1}-\frac1{x+1}\right)dx=\ln\frac{x^3}{x^2-1}+C.$

2.943A $F(x)=\int\frac{\cos x dx}{1+\sin^2x}=\int\frac{d(\sin x)}{1+\sin^2 x}=\text{arctg}\sin x+C$, $F(1)-F(-1)=2\text{arctg}(\sin 1)$.

2.944A $\int x^2e^xdx=\int x^2(e^x)'dx=x^2e^x-2\int x(e^x)'dx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C.$

2.945A $I(x)=\int x\sin x dx=\int x(-\cos x)'dx=-x\cos+\sin x+C$, $J(x)=\int x\cos x dx=\int x(\sin x)'dx=x\sin x+\cos x+C_1$; $I(0)=0=C$, $J(0)=1=1+C_1$, $I^2(x)+J^2(x)=x^2+1$.

2.946A $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\int\frac{d(x+\frac12)}{\sqrt{(x+\frac12)^2+(\frac{\sqrt3}{2})^2}}=\ln(x+\frac12+\sqrt{x^2+x+1})+C.$

2.947A $f(x)=|x-1|$ este continuă şi admite o infinitate de primitive pe R.

2.948A $\int\cos^2x\sin x dx=-\int\cos^2x(\cos x)'dx=-\frac{\cos^3x}{3}+C.$

2.949A $F(x)=\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C=F(x)$; $F(\frac12)=\frac\pi6\Rightarrow C=\frac{\sqrt3}{2}$; $F(\frac{\sqrt2}{2})=\frac\pi4+\frac{\sqrt3-\sqrt2}{2}$.

2.950A Pentru $f(x)=\begin{cases}3x^2+2x+1, & x\le0\\ e^x,& x>0\end{cases}$, $F(x)=\int f(x)dx=$
$\begin{cases}x^3+x^2+x+C\\ e^x+C_1\end{cases}$, $F(x)=\begin{cases}x^3+x^2+x,& x\le0\\ e^x-1,& x>0\end{cases}$.
$F(0)=C=1+C_1$.

2.951A $f(x)=\begin{cases}2x-1,&x\le1\\x^2,&x>1\end{cases}$ are primitiva $F(x)=\begin{cases}x^2-x+C,&x\le1\\x^3+C_1,&x>1\end{cases}$
de unde $F(1)=C=\frac13+C_1$. Condiţia $F(4)=-8=\frac{4^2}{3}+C-\frac13$.

2.952A Deoarece $\int e^x\sin x dx=\frac12e^x(\sin x-\cos x)$ rezultă $F(x)=\int xe^x\sin x dx=\int x[\frac12e^x(\sin x-\cos x)]'dx=\frac12xe^x(\sin x-\cos x)-\frac12\int e^x(\sin x-\cos x)dx=\frac12xe^x(\sin x-\cos x)+\frac12e^x\cos x+C.$

2.953A $F(x)=\int x^2\ln x dx=\frac13\int(x^3)'\ln x dx=\frac13(x^3\ln x-\int x^3\frac1x dx)=\frac13(x^3\ln x-\frac{x^3}{3})+C.$

2.954A $I=\int \text{arctg}x dx=\int(x)'\text{arctg}x dx=x\text{arctg}x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\text{arctg}x-\frac12\ln(x^2+1)+C.$

2.955A $\int_1^t(x-1)e^{-x}dx=-(x-1)e^{-x}|_1^t+\int_1^te^{-x}dx=-te^{-t}+e^{-1}\to\frac1e.$

2.956A $F(x)=\int x\ln(x+1)dx=\frac12\int(x^2)'\ln(x+1)dx=\frac12[x^2\ln(x+1)-\int\frac{(x^2-1)+1}{x+1}dx]=\frac12[x^2\ln(x+1)-\frac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)]+C=(x^2-1)\ln\sqrt{x+1}-\frac{x^2}{4}+\frac x2+C.$

2.957A $F(x)=\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-2x}}=-\int\frac{d(e^{-x})}{1+(e^{-x})^2}=-\text{arctg}e^{-x}+C$ sau $F(x)=\int\frac{e^xdx}{1+e^{2x}}=\int\frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2}=\text{arctg}e^x+C_1.$

2.958A $F(x)=\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1+x^3}}=\frac13\int\frac{(x^3+1)-1}{\sqrt{1+x^3}}d(x^3+1)=\frac13\left[\frac{(x^3+1)^{\frac32}}{\frac32}-\frac{(x^3+1)^{\frac12}}{\frac12}\right]=\frac29\sqrt{(x^3+1)^3}-\frac23\sqrt{x^3+1}+C$; $F(0)=\frac29-\frac23+C=0$, $C=\frac49$, $a=F(2)=\frac{40}{9}$.

2.959A $\int\frac{dx}{e^x+1}=-\int\frac{d(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}}=-\ln(1+e^{-x})+C=F(x)\to-\infty.$

2.960A $f(x)=\max\{x,x^2\}=\begin{cases}x^2,&x<0\\x,&0\le x\le1\\x^2,&1<x\end{cases}$ nu este continuă deci nu este derivabilă, admite primitive, $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+C,&x<0\\\frac{x^2}{2}+C_1,&0\le x\le1\\\frac{x^3}{3}+C_2,&1<x\end{cases}$, $F(0)=C=C_1$, $F(1)=\frac12+C_1=\frac13+C_2$ deci d) şi f) sunt false. Rămâne e), f nu este monotonă.

2.961B Funcţia $f(x)=\begin{cases}x^2+m,&x<0\\x+2m^2,&x\ge0\end{cases}$ este continuă dacă $m=2m^2$, deci $m = 0$ sau $m = \frac{1}{2}$ şi atunci admite primitive.

2.962B Primitiva $F(x)$ a lui $f(x) = xe^{-x}$ care verifică condiţia $F(-1) = 0$ este $F(x) = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -e^{-x}(x+1) + C$, $F(-1) = 0 = C$ deci $F(x) = -e^{-x}(x+1)$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$.

2.963B $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+1} = \int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} d\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$. $F(0) = 0 = \frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + C$; $F(1) = \frac{\ln 3}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

2.964B Făcând derivatele funcţiilor din enunţ se observă că primitiva funcţiei $f(x) = \frac{x^{5n-1}+x^{n-1}}{1+x^{6n}}$ este $F(x) = \frac{1}{n}\mathrm{arctg}(x^n) + \frac{1}{3n}\mathrm{arctg}(x^{3n}) + C$. Poate fi calculată şi direct observând că:

$$\frac{x^{5n-1}+x^{n-1}}{1+x^{6n}} = \frac{(x^{5n-1}+x^{n-1})(1+x^{2n})}{(1+x^{2n})(1+x^{6n})} = \frac{x^{5n-1}+x^{7n-1}+x^{n-1}+x^{3n-1}}{(1+x^{2n})(1+x^{6n})}$$

$$\frac{x^{n-1}(x^{6n}+1)+x^{3n-1}(x^{2n}+1)}{(x^{2n}+1)(x^{6n}+1)} = \frac{x^{n-1}}{x^{2n}+1} + \frac{x^{3n-1}}{x^{6n}+1} \quad \text{deci}$$

$$\int \frac{x^{5n-1}+x^{n-1}}{1+x^{6n}}dx = \int \frac{x^{n-1}}{x^{2n}+1}dx + \int \frac{x^{3n-1}}{x^{6n}+1}dx =$$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{d(x^n)}{(x^n)^2+1} + \frac{1}{3n}\int \frac{d(x^{3n})}{(x^{3n})^2+1} = \frac{1}{n}\mathrm{arctg}x^n + \frac{1}{3n}\mathrm{arctg}x^{3n} + C.$$

2.965B $F(x) = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}dx = \frac{2}{3}\int \frac{d\sqrt{x^3}}{\sqrt{1-(\sqrt{x^3})^2}} = \frac{2}{3}\arcsin\sqrt{x^3} + C$.

2.966B Funcţia 1° $x \to \max\{1, x^2\}$ are proprietatea lui Darboux şi are primitivă, celelalte funcţii 2° $x \to [x]-x$; 3° $x \to \mathrm{sgn}x$, 4° $x \to (1+x^2)\mathrm{sgn}x$, 5° $x \to [\cos x]$, 6° $x \to \{\sin x\}$ nu au proprietatea lui Darboux şi nu au primitivă .

2.967B $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^2}dx = \mathrm{arctg}x - \int x\left(-\frac{1}{2(1+x^2)}\right)'dx = \mathrm{arctg}x + \left[\frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}\right] = \frac{\mathrm{arctg}x}{2} + \frac{x}{2(1+x^2)} + C$.

2.968B $\int \frac{(2x-3)dx}{(x-1)^2(x-2)^2} = \int \frac{dx}{(x-2)^2} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} + C = \frac{1}{-x^2+3x-2} + C$.

2.969B $\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{dx}{1+\cos(x-\frac{\pi}{2})} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + C$.

2.970C Funcţia $f : [0,2] \to [0,2]$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 2x-2, & x \in (1,2] \end{cases}$ nu are proprietatea lui Darboux şi nu admite primitive $\left(f\left(\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]\right) = f\left(\left[\frac{3}{4},1\right]\cup\left(1,\frac{5}{4}\right]\right) = \left(0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{4},1\right]\right)$, nu este injectivă, este integrabilă, f este surjectivă.

2.971C Funcţia $f(x) = [x] - x = -\{x\}$ nu are proprietatea lui Darboux dar $f(\mathbf{R})$ este un interval (rezultă din reprezentarea grafică a "părţii zecimale" $\{x\}$.

2.972C Funcţia $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ are primitive pentru $a = 0$: fie $g(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ continuă şi $G(x)$ o primitivă a lui $g(x)$; evident o primitivă a lui $f(x)$ este de forma $F(x) = x^2\cos\frac{1}{x} - 2G(x) + C$. $(F'(x)) = 2x\cos\frac{1}{x} + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\sin\frac{1}{x}\right) - 2G'(x) = \sin\frac{1}{x}$, deoarece $G'(x) = x\cos\frac{1}{x}$, $F(x)$ este derivabilă în origine şi $F'(0) = f(0)$ numai pentru $a = 0$.

2.973C Fie $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0,\frac{1}{2}] \\ 1, & x \in (\frac{1}{2},1] \end{cases}$. f este continuă, are primitive, g nu are proprietatea lui Darboux, deci nu are primitive.

2.974C $a_n = \int_0^n e^{-\sqrt{x}}dx = 2\int_0^n \sqrt{x}(-e^{-\sqrt{x}})'dx = 2[-\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}|_0^n + \int_0^n e^{-\sqrt{x}}d(\sqrt{x})] = -2\sqrt{n}e^{\sqrt{n}} - 2e^{-\sqrt{x}}|_0^n = -2[e^{-\sqrt{n}}(\sqrt{n}+1)-1]$; $\lim a_n = 2$.

2.975C Dacă F este o primitivă a lui f şi $F(x)f(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $F(0) = 1$ atunci $F(x)F'(x) = x$, $\int F(x)F'(x)dx = \frac{F^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{2}$, $F^2(0) = 1 = C$, $F^2(x) = x^2+1$, $F(x) = \sqrt{x^2+1}$.

2.976C $F(x) = \int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+1)}\right]dx = \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right]dx = \frac{1}{2}[\ln x - 2\ln(x+1) + \ln(x+2)] + C = \ln\sqrt{\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}} + C$ $(x \in (0,\infty))$.

2.977C $I_n(t) = \int_0^t \frac{dx}{(1+x^5)^n} = \int_0^t \frac{1}{(1+x^5)^n}\cdot(x)'dx = \frac{x}{(1+x^5)^n}\Big|_0^t +$

$+5n\int_0^t \frac{(x^5+1)-1}{(1+x^5)^{n+1}}dx = \frac{t}{(1+t^5)^n}+5nI_n(t)-5nI_{n+1}(t) \Rightarrow I_{n+1}(t) = \frac{5n-1}{5n}I_n(t)+$ $\frac{1}{5n}\cdot\frac{t}{(1+x^5)^n}$.

2.978C $F(x) = \int (x)'\text{arctg}\sqrt{x}\cdot dx = x\text{arctg}\sqrt{x} - \int \frac{(\sqrt{x})^2+1-1}{1+(\sqrt{x})^2}d(\sqrt{x}) =$ $x\text{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \text{arctg}\sqrt{x} + C$.

2.979C O primitivă a funcţiei $f(x) = \frac{1}{5-4\cos x}$ pe intervalul $[0, 2\pi]$ o determinăm astfel: punem $\text{tg}\frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ şi deoarece în $x = \pi$, $\text{tg}\frac{x}{2}$ nu este definită, $F(x) = \int \frac{dx}{5-4\cos x} = 2\int \frac{dt}{1+9t^2} =$

$$\frac{2}{3}\int \frac{d(3t)}{1+(3t)^2} = \begin{cases} \frac{2}{3}\text{arctg}\,(3\text{tg}\frac{x}{2}), & x \in [0,\pi) \\ k, & x = \pi \\ \frac{2}{3}\text{arctg}\,(3\text{tg}\frac{x}{2}) + C, & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}, \ \lim_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} F(x) = \frac{2}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$\lim_{\substack{x\to\pi \\ x>\pi}} F(x) = \frac{2}{3}\text{arctg}(-\infty) + C = -\frac{\pi}{3} + C = \frac{\pi}{3} = k$ deci o primitivă este

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\text{arctg}\,(3\text{tg}\frac{x}{2}), & x \in [0,\pi) \\ \frac{\pi}{3}, & x = \pi \\ \frac{2}{3}\text{arctg}\,(3\text{tg}\frac{x}{2}) + \frac{2\pi}{3}, & (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

2.6 Integrale definite

2.980A $I = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \int_1^3 \frac{2d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\text{arctg}\sqrt{x}\big|_1^3 = 2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$.

2.981A $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\text{ctg}^2x+\text{ctg}^4x+\text{ctg}^6x+\text{ctg}^8x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\text{ctg}^2x+\text{ctg}^6x)(1+$ $\text{ctg}^2x)dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\text{ctg}^2x+\text{ctg}^6x)d(\text{ctg}x) = -\left(\frac{\text{ctg}^3x}{3}+\frac{\text{ctg}^7x}{7}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{10}{21}$

2.982A Funcţia $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x =$ $1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = \frac{3+\cos 4x}{4}$ are perioada $\frac{\pi}{2}$ ($\cos\alpha x$ are perioada $\frac{2\pi}{\alpha}$) şi proprietatea $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ deci $I = \int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x} = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3+\cos 4x} =$ $32\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{3+\cos 4x}$; cu schimbările succesive $4x = t$ şi $\text{tg}\frac{t}{2} = u$ obţinem $I = 8\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{3+\cos t} = 16\int_0^{\infty}\frac{du}{4+2u^2} = 8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\infty} = 2\sqrt{2}\pi$. (Altfel cu $\text{tg}2x = t$: $I = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1-\frac{\sin^2 2x}{2}} = 8\int_0^{\infty}\frac{1}{2-\frac{t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = 8\int_0^{\infty}\frac{dt}{2+t^2}$).

2.983A Aria cuprinsă între graficele funcţiilor $f(x) = |x|$ şi $g(x) = 1$, $x \in [-1,1]$ este $2\int_0^1(1-x)dx = 2\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1$.

2.984A $A = \int_0^1(e^x+e^{-x})dx = (e^x-e^{-x})|_0^1 dx = e + \frac{1}{e} - 2$.

2.985A Divizând segmentul $[0,1]$ în n părţi cu punctele de diviziuni $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$, pentru funcţia $f(x) = \sqrt{1+x}$ obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1\sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

2.986A $\int_0^1\frac{x^2dx}{x^6+1} = \frac{1}{3}\int_0^1\frac{(x^3)'}{1+(x^3)^2}dx = \frac{1}{3}\text{arctg}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\text{arctg}1 = \frac{\pi}{12}$.

2.987A $\int_0^1 x^2\sqrt{1+3x^3}dx = \frac{1}{9}\int_0^1(1+3x^3)^{\frac{1}{2}}(1+3x^3)'dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(1+3x^3)^3}\Big|_0^1$ $= \frac{2}{27}(\sqrt{4^3}-1) = \frac{14}{27}$.

2.988A $I = \int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int_0^1\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = (\arcsin x + \sqrt{1-x^2})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$.

2.989A $I = \int_{-1}^1 x^3\sqrt{1+x^4}dx = 0$, $f(x) = x^3\sqrt{1+x^4}$ este impară.

2.990A Analog cu 2.985A, $I = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}}$ $= \int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2}-1$.

2.991A $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\text{ctg}^3x+\text{ctg}^5x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\text{ctg}^3x(1+\text{ctg}^2x)dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\text{ctg}^3x\cdot$ $d(\text{ctg}x) = -\frac{\text{ctg}^4x}{4}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}(\text{ctg}^4\frac{\pi}{2} - \text{ctg}^4\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$.

2.992A $I = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\sqrt[n]{2^k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}2^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$.

2.993A $I = \int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \frac{1}{2}\int_0^1(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}d(x^2+1) = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\Big|_0^1 =$ $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.994A $I=\int_0^\pi \frac{xdx}{(x^2+\pi^2)^3}=\frac{1}{2}\int_0^\pi (x^2+\pi^2)^{-3}(x^2+\pi^2)'dx=\frac{(x^2+\pi^2)^{-3+1}}{-3+1}\Big|_0^\pi$ $=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4\pi^4}-\frac{1}{\pi^4}\right)=\frac{3}{16\pi^4}$.

2.995A $I=\int_0^1 e^x\sin xdx=e^x\sin x|_0^1-\int_0^1 e^x\cos xdx=e^x(\sin x-\cos x)|_0^1-$ $\int_0^1 e^x\sin xdx\Rightarrow I=\frac{1}{2}[1+e\sin 1-e\cos 1]$.

2.996A $I=\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2-2x+5}=\int_{-1}^1\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+2^2}=\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x-1}{2}\Big|_{-1}^1=$ $-\frac{1}{2}\text{arctg}(-1)=\frac{\pi}{8}$

2.997A $I=\int_{-1}^2\frac{|x|-1}{x+3}dx=-\int_{-1}^0\frac{(x+1)dx}{x+3}+\int_0^2\frac{(x-1)dx}{x+3}=-\int_{-1}^0\left(1-\frac{2}{x+3}\right)dx+$ $\int_0^2\left(1-\frac{4}{x+3}\right)dx=-x|_{-1}^0+2\ln(x+3)|_{-1}^0+[x-4\ln(x+3)]|_0^2=1-2\ln 2+$ $6\ln 3-4\ln 5$.

2.998A Dacă $f(x)=\frac{F'(x)}{F^2(x)}$ atunci $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{dF(x)}{F^2(x)}=-\frac{1}{F(x)}\Big|_a^b=$ $-\frac{1}{F(b)}+\frac{1}{F(a)}$.

2.999A Dacă $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx$ şi $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$ atunci $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$ şi $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$ deci $A=B$. (Altfel: $A+B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$, $A-B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xdx=\frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0$).

2.1000A $S=\int_1^4\frac{xdx}{x^2+9}=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{d(x^2+9)}{x^2+9}=\frac{1}{2}\ln(x^2+9)\Big|_1^4=\ln\sqrt{\frac{13}{9}}$.

2.1001A $\int_{-2}^3|2-2x|dx=2\left[\int_{-2}^1(1-x)dx+\int_1^3(x-1)dx\right]=$

$$=2\left[\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^1+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^3\right]=13.$$

2.1002A Dacă $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin x+b\cos x-1)dx=0$ atunci $(-a\cos x+b\sin x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$ $=0$ deci $a+b=\frac{\pi}{2}$.

2.1003A Dacă $\int_{-1}^2\left(\frac{x^2-4x+3}{x-3}-ax\right)dx=0$, deci

$$\int_{-1}^2\left[\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)}-ax\right]dx=\left(\frac{x^2}{2}(1-a)x\right)\Big|_{-1}^2=-\frac{3}{2}(a+1)=0,\quad a=-1$$

2.1004A Să se calculeze derivata lui $F(x)=\int_0^{\text{arctg}x}\frac{1}{1+\text{tg}^2t}dt$. Notăm $G(t)$ o primitivă a lui $\frac{1}{1+\text{tg}^2t}$; atunci $F(x)=G(\text{arctg}x)-G(0)$ iar $F'(x)=$ $G'(\text{arctg}x)\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+\text{tg}(\text{arctg}x)}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)^2}$.

2.1005A $I=\int_{-2}^2|x-1|dx=\int_{-2}^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx=\left(\frac{x-x^2}{2}\right)\Big|_2^1+$ $\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2=5$.

2.1006A $I=\int_5^6\frac{x+1}{x^2-16}=\frac{5}{8}\int_5^6\frac{dx}{x-4}+\frac{3}{8}\int_5^6\frac{dx}{x+4}=$

$$=\left[\frac{5}{8}\ln(x-4)+\frac{3}{8}\ln(x+4)\right]\Big|_5^6=\frac{3}{8}\ln 10+\frac{5}{8}\ln 2-\frac{3}{8}\ln 9.$$

2.1007A Pe intervalul $I=[a,b]\subset[0,2\pi]$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\cos nxdx=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin nb-\sin na}{n}=0$.

2.1008A $S=\int_0^3\left(x^2-\frac{x^2}{3}\right)dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^3=\frac{2}{9}\cdot 3^3=6$.

2.1009A $I=\int_0^1\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}dx=\int_0^1\frac{x^2+x+1-2x}{x^2+x+1}dx=$

$$=\int_0^1\left[1-\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right]dx=$$

$$=\left(x-\ln(x^2+x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)\Big|_0^1=1+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}-\ln 3.$$

2.1010A $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x\text{tg}tdt=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{tg}x}{2x}=\frac{1}{2}\left(\left(\int_0^x\text{tg}tdt\right)'=\text{tg}x\right)$.

2.1011A $\int_0^1 e^{f(x)}+xf'(x)e^{f(x)}dx=\int_0^1(xe^{f(x)})'dx=xe^{f(x)}\Big|_0^1=e^{f(1)}$.

2.1012A $\int_0^\pi\cos^3 xdx=\int_0^\pi(1-\sin^2 x)(\sin x)'dx=\left(\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}\right)\Big|_0^\pi=0$;

se aplică teorema Lagrange primitivei $F(x)$ a lui $f(x)$: $F(\pi) - F(0) = (\pi - 0)F'(\xi) = \pi f(\xi) = \pi\cos^3\xi = 0$, deci $\xi = \frac{\pi}{2}$.

2.1013A Pentru $I = [a, b] \subset [0, 2\pi]$, $\int_I \sin nx dx = \frac{1}{n}(\cos na - \cos nb) \to 0$.

2.1014A Pentru funcţia $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ \frac{x^2}{3}, & x \geq 1 \end{cases}$ valoarea integralei

$$I = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 \frac{x^2}{3}dx = \left.\frac{x^3}{2}\right|_0^1 + \left.\frac{x^3}{9}\right|_1^2 = \frac{23}{18}.$$

2.1015A $I = \int_{-2}^2 2^{[x]}dx$ ($[x]$ - partea întreagă a lui x) se poate scrie

$$I = \int_{-2}^{-1} 2^{-2}dx + \int_{-1}^0 2^{-1}dx + \int_0^1 2^0dx + \int_1^2 2dx = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + 1 + 2 = \frac{15}{4}.$$

2.1016A $I = \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = \int_1^e \sin(\ln x)\cdot(\ln x)'dx = -\cos(\ln x)|_1^e = -\cos 1 + 1$.

2.1017A $I = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\cdot\ln\left(\frac{k}{n}+1\right) = \int_0^1 \ln(x+1)dx =$
$= x\ln(x+1)|_0^1 - \int_0^1 \frac{(x+1)-1}{x+1}dx = \ln 2 - [x - \ln(x+1)]|_0^1 = 2\ln 2 - 1$.

2.1018A $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}^3x + \mathrm{tg}^5x + \mathrm{tg}^7x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}^5x)(\mathrm{tg}x)'dx =$
$= \left.\left(\frac{\mathrm{tg}^2x}{2} + \frac{\mathrm{tg}^6x}{6}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

2.1019B $I = \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{(x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}}dx + \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} =$
$\left(2\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})\right)\Big|_0^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} + \ln 2$ deci $I \in \left[\frac{7}{6}, \frac{5}{4}\right]$.

2.1020B $a_n = \int_0^{\ln n} \frac{dx}{e^x(1+e^{2x})} = \int_0^{\ln n} \frac{e^{-3x}dx}{e^{-2x}+1} = -\int_0^{\ln n} \frac{[(e^{-2x}+1)-1]de^{-x}}{e^{-2x}+1} =$
$(-e^{-x} + \mathrm{arctg}e^{-x})|_0^{\ln n} = -e^{-\ln n} + \mathrm{arctg}e^{-\ln n} + 1 - \mathrm{arctg}1 = -\frac{1}{n} + \mathrm{arctg}\frac{1}{n} + 1 - \frac{\pi}{4}$; $\lim a_n = 1 - \frac{\pi}{4}$.

2.1021B $S = \int_0^1 (x+1)e^{1-x}dx + \int_1^2 (x+1)e^{x-1}dx = e\int_0^1 (x+1)(-e^{-x})'dx + \frac{1}{e}\int_1^2 (x+1)(e^x)'dx = -e[(x+2)e^{-x}|_0^1 + \left.\frac{1}{e}xe^x\right|_1^2 = -e(1+2)e^{-1} + 2e + \frac{1}{e}(2e^2 - e) = 4(e-1)$.

2.1022B $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2xdx}{1+\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2\sin^2 x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\frac{x}{2})}{\cos^2\frac{x}{2}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{x}{2}dx =$
$\left.\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)dx = 1 - 2(x - \sin x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 3 - \pi$.

2.1023B $I = \int_0^\pi \sin 2xdx = -\left.\frac{\cos 2x}{2}\right|_0^\pi = 0$, $J = \int_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{3+4x^2}} =$
$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(3+4x^2)'dx}{2\sqrt{3+4x^2}} = \left.\frac{1}{2}\sqrt{3+4x^2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$ deci $I + J = \frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$.

2.1024B $A = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)|_0^1 =$
$\ln 2$, $B = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

2.1025B $I = \int_0^\pi |\cos^3 x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)d(\sin x) - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (1-\sin^2 x)d(\sin x) =$
$\left.\left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left.\left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\right|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

2.1026B $I = \int_1^A \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\int_1^A (\ln x)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'dx =$
$= -\frac{1}{2}\left[\left.\frac{\ln x}{1+x^2}\right|_1^A - \int_1^A \frac{dx}{x(1+x^2)}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln A}{1+A^2} + \frac{1}{2}\int_1^A \frac{d(1+\frac{1}{x^2})}{1+\frac{1}{x^2}}\right] =$
$-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln A}{1+A^2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\Big|_1^A\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln A}{1+A^2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{A^2}\right) - \ln 4\right]$;
$\lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{4}\ln 2$.

2.1027B $b = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}dx = a$

2.1028B Notăm $y = f(x)$ deci $x = g(y)$, $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$: $I = \int_a^b f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(y)dy = xf(x)|_a^b - \int_a^b xf'(x)dx + \int_\alpha^\beta g(y)dy =$
$bf(b) - af(a) - \int_\alpha^\beta g(y)dy + \int_\alpha^\beta g(y)dy = b\beta - a\alpha$.

2.1029B $I(a) = \int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1} = \int_1^3 \frac{dx}{1+a-x} = -\ln(1+a-x)|_1^3 =$
$-\ln(a-2) + \ln a = \ln\frac{a}{a-2}$ dacă $a > 3$. Rezultă $\lim_{a\to 3} I(a) = \ln 3$.

2.1030B Notăm cu $G(t)$ o primitivă a lui $f(t)$, $G'(t) = f(t)$ şi fie $F(x) =$

$\int_c^{b(x)} f(t)dt = G(b(x)) - G(c)$: $F'(x) = G'(b(x)) \cdot b'(x) = f(b(x)) \cdot b'(x)$.

2.1031B $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}(1-x^2)'dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \frac{1}{3}$.

2.1032B $F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+tx}$ nu are sens pentru $t = -\frac{1}{x}$, $0 \le t \le 1$, $0 \le t = -\frac{1}{x} \le 1$, deci domeniul de definiţie a lui F este $(-1, \infty)$.

2.1033B Abscisele punctelor de extrem ale funcţiei $f(x) = x^2e^x$ ($f'(x) = e^x(x^2+2x)$) sunt $x = 0$, $x = -2$ deci $S = \int_{-2}^0 x^2e^x dx = x^2e^x|_{-2}^0 - 2\int_{-2}^0 xe^x = -4e^{-2} - 2[xe^x - e^x]|_{-2}^0 = 2 - 10e^{-2}$.

2.1034B $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x}$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x} \Rightarrow I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$; $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x}dx = = \ln(\sin x + \cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$ deci $I = J = \frac{\pi}{4}$.

2.1035B Dacă $f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln x, & x > 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ atunci aria cuprinsă între graficele lui $f_{n+1}(x)$ şi $f_n(x)$ care evident se intersectează în $x = 0$ şi $x = 1$ este $S = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n)\ln x dx$ ($(x-1)\ln x > 0$, $\forall x \in (0,1)$) deci $S =$

$$\left[\left(\frac{x^{n+2}}{n+2} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\ln x - \left(\frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2}$$

deoarece $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.

2.1036B $\int_e^a \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_e^a \frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2}dx = -\frac{1}{\ln x}\Big|_e^a = 1 - \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = e^2$.

2.1037B $S = \int_2^5 \frac{|x^2-4x+3|}{x}dx = -\int_2^3 \left(x - 4 + \frac{3}{x}\right)dx + \int_3^5 \left(x - 4 + \frac{3}{x}\right)dx = -\left[\frac{x^2}{2} - 4x + 3\ln x\right]_2^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 4x + 3\ln x\right]_3^5 = -2\left[\frac{9}{2} - 12 + 3\ln x\right] + [2 - 8 + 3\ln 2] + \left(\frac{25}{2} - 20 + 3\ln 5\right) = \frac{3}{2} + 3\ln\frac{10}{9}$.

2.1038B $I = \int_{e^e}^{e^{e^e}} \frac{dx}{x(\ln x)\ln\ln x} = \int_{e^e}^{e^{e^e}} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)\ln\ln x} = \int_{e^e}^{e^{e^e}} \frac{d(\ln\ln x)}{\ln\ln x} = \ln\ln\ln x|_{e^e}^{e^{e^e}} = \ln\ln\ln e^{e^e} - \ln\ln\ln e^e = \ln\ln e^e - \ln\ln e = \ln e - \ln 1 = 1$.

2.1039B $\int_0^2 \min\left(x, \frac{2}{1+x^2}\right)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 \frac{2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 +$

$+ \ 2\mathrm{arctg}x\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + 2\left(\mathrm{arctg}2 - \frac{\pi}{4}\right)$.

2.1040B Aria mărginită de curba $y = \frac{\sin 3x}{\sin^2 x} = f(x)$, axa Ox şi dreptele $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$; notăm $F(x)$ o primitivă a lui $f(x)$, $F(x) = \frac{1}{6}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + 4\cos x$; deoarece $f(x) < 0$ pentru $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, $S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(x)dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx = 2\left(F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) + F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\sqrt{2}$.

2.1041C Vezi 2.1039: $I = \int_0^{\sqrt{3}} \min\left(x, \frac{2}{1+x^2}\right)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \ 2\mathrm{arctg}x\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$.

2.1042C Deoarece $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ este continuă pe $[0,1]$ este mărginită pe $[0,1]$ deci există $M > 0$ astfel încât $|f(x)| < M$ pe $[0,1]$. $\left|\int_0^1 f(x)\cdot x^n dx\right| \le M\int_0^1 x^n dx = \frac{M}{n+1}x^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{M}{n+1} \to 0$.

2.1043C $a = \lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{1}{x(1+\ln x)} = \lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{1+\ln x} = \lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\downarrow 0}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty$; $b = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x + 1)}{1+\ln x} = \ln(1+\ln x)\Big|_e^{e^2} = \ln(1+2) - \ln(1+1) = \ln\frac{3}{2}$.

2.1044C $F(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}dt$, $(x \ne 0)$; $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}dt$ şi punem $t = -u$, $u = -t$, $dt = -du \Rightarrow F(-x) = -\int_x^{2x} \frac{u^2}{u^2+\sin^2 u}du = -F(x)$, F impară.

2.1045C $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sin\pi\frac{k}{n} = \int_0^1 \sin\pi x dx = -\frac{\cos\pi x}{\pi}\Big|_0^1 = -\frac{1}{\pi}(-1-1) = \frac{2}{\pi}$.

2.1046C $S = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln\ln x|_e^{e^2} = \ln\ln e^2 - \ln\ln e = \ln 2$.

2.1047C $\min\limits_{a,b\in\mathbf{R}} \int_{-1}^1 (x^2 - a - bx)^2 dx = \min\limits_{a,b\in\mathbf{R}} \int_{-1}^1 \left(x^4 + a^2 + b^2x^2 - 2ax^2 - 2bx^3 + 2abx\right)dx = \min\limits_{a,b\in\mathbf{R}} \left[\frac{x^5}{5} + a^2x + b^2\frac{x^3}{3} - 2a\frac{x^3}{3} - 2b\frac{x^4}{4} + abx^2\right]\Bigg|_{-1}^1 =$

$= \min\limits_{a,b\in\mathbf{R}} \left[2\left(a^2 - 2\frac{a}{3}\right) + \frac{2b^2}{3} + \frac{2}{5}\right]$. $\min\limits_{a,b\in\mathbf{R}} \left[2\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2b^2}{3} + \frac{8}{45}\right] = \frac{8}{45}$ (luăm $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$).

2.1048C Dacă $g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$, f continuă atunci $g'(x) = f(x+1) - f(x)$; notăm $F(t)$ o primitivă a lui f, $F'(t) = f(t)$ deci $g(x) = F(x+1) - F(x)$, $g'(x) = F'(x+1) - F'(x) = f(x+1) - f(x)$.

2.1049C Dacă f are derivată continuă pe $[a,b]$ deci $f'(x)$ este mărginită pe $[a,b]$ atunci $\lim\limits_{t\to\infty} \int_a^b f(x)\cos tx dx$ se obţine astfel: $\int_a^b f(x)\left(\frac{\sin tx}{t}\right)' dx = \frac{1}{t} f(x)\sin tx\Big|_a^b - \frac{1}{t}\int_a^b f'(x)\sin tx dx$ şi deoarece $|\, f(x)\sin tx|_a^b \,| \le |f(b) - f(a)|$ iar $\left|\int_a^b f'(t)\sin tx dx\right| < M$ rezultă că limita este 0.

2.1050C Deoarece $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(-x)dx$ (notăm $-x = t$, $dx = -dt$ $\int_{-a}^{a} f(-x)dx = -\int_a^{-a} f(t)dt$) rezultă $I\alpha = \int_{-a}^{a} \alpha f(x)dx$, $I\beta = \int_{-a}^{a} \beta f(-x)dx$, $I(\alpha+\beta) = \int_{-a}^{a} [\alpha f(x) + \beta f(-x)]dx = \int_{-a}^{a} \gamma dx = \gamma \cdot 2a$, $I = \frac{2a\gamma}{\alpha+\beta}$ (sau se integrează pe $[a,b]$ egalitatea dată).

2.1051C $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x\mathrm{tg}\alpha+1} = \int_0^1 \frac{d(x+\mathrm{tg}\alpha)}{(x+\mathrm{tg}\alpha)^2+(\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha})^2} =$

$= \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha}} \mathrm{arctg}\frac{x+\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha}}\left[\mathrm{arctg}\frac{1+\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha}} - \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha}}\right]$.

2.1052C $I = \int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2+\ln x}dx = \int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2} x dx = \frac{1}{2m}\int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2}(mx^2)'dx = \frac{1}{2m}e^{mx^2}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2m}(e^{2m} - e^m) = \frac{1}{m} \Rightarrow e^{2m} - e^m = 2$, $m = \ln 2$.

2.1053C Fie $f(x) = \int_0^{2x^2} e^{2t^2}\sin t dt$ şi $F(t)$ o primitivă a lui $e^{2t^2}\sin t$. Atunci $F'(t) = e^{2t^2}\sin t$ iar $\int_0^{2x^2} e^{2t^2}\sin t dt = F(2x^2) - F(0) = f(x)$, $f'(x) = F'(2x^2)\cdot 4x = e^{2(2x^2)^2}\sin 2x^2 \cdot 4x$; deci $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{4x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{8x^4}\sin 2x^2\cdot 4x}{4x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x^2}{x^2} = 2$.

2.1054C Vezi 1029B.

2.1055C Fie $f : [1,\infty] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 6\ln x - \int_1^{x^2}\frac{e^t}{t}dt$ şi $A = f[[1,\infty)]$. Notăm o primitivă a lui $\frac{e^t}{t}$ cu $F(t)$, deci $F'(t) = \frac{e^t}{t}$ şi $\int_1^{x^2}\frac{e^t}{t}dt = F(x^2) - F(1) = G(x)$, $G'(x) = F'(x^2)\cdot 2x = \frac{e^{x^2}}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{x}e^{x^2}$. Dar $f'(x) = \frac{6}{x} - G'(x) = \frac{6}{x} - \frac{2}{x}e^{x^2} = \frac{2}{x}(3 - e^{x^2})$ şi f are un punct de maxim în $x = \sqrt{\ln 3}$ de unde $A = (-\infty, f(\sqrt{\ln 3})]$, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \le \lim\limits_{x\to\infty}(6\ln x - \int_1^x dt) = -\infty$.

2.1056C $I = \int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 [(1-x^2)-1]^2\sqrt{1-x^2}(1-x^2)'dx = \left[-\frac{1}{7}\sqrt{(1-x^2)^7} + \frac{2}{5}\sqrt{(1-x^2)^5} - \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\right]\Big|_0^1 = \frac{8}{105}$.