Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică – informatică

MODEL

- **Toate subiectele (I, II şi III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Calculaţi $(f\circ f)(512)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\cos 2x+\sin x=0$.

5p **4.** Se consideră mulţimea $M=\{0,1,2,3,4,5\}$. Determinaţi numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c\in M$ şi $a<b<c$.

5p **5.** Calculaţi distanţa dintre dreptele paralele de ecuaţii $x+2y=6$ şi $2x+4y=11$.

5p **6.** Paralelogramul $ABCD$ are $AB=1$, $BC=2$ şi $m\left(\sphericalangle BAD\right)=60^\circ$. Calculaţi produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru $a,b,c\in\mathbb{R}^*$, se consideră sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=b\\ cx+ay+bz=a\\ bx+cy+az=c\end{cases}$, $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătaţi că determinantul sistemului este $\Delta=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

5p **b)** Rezolvaţi sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Ştiind că $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, arătaţi că sistemul are o infinitate de soluţii (x,y,z), astfel încât $x^2+y^2=z-1$.

2. Se consideră mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ \hat{0} & c\end{pmatrix} \middle|\ a,b,c\in\mathbb{Z}_4\right\}$.

5p **a)** Determinaţi numărul elementelor mulţimii G.

5p **b)** Daţi un exemplu de matrice $A\in G$ cu proprietatea că $\det A\neq\hat{0}$ şi $\det A^2=\hat{0}$.

5p **c)** Determinaţi numărul soluţiilor ecuaţiei $X^2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$, $X\in G$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **b)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=|\sin nx|$ şi numerele $I_n=\int_\pi^{2\pi}\dfrac{f_n(x)}{x}dx$.

5p **a)** Calculați $\int_0^\pi f_2(x)dx$.

5p **b)** Arătați că $I_n\le\ln 2$.

5p **c)** Arătați că $I_n\ge\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}\right)$.