1. Fie sistemul $\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+y-z=2 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$, unde m este un parametru real. Pentru câte valori $m \in \mathbb{Z}$ sistemul are soluţie unică (x_0, y_0, z_0), cu componentele numere întregi? **(7 pct.)**

   a) o infinitate; b) 5; c) 4; d) 1; e) 2; f) 3.

   Soluţie. Determinantul matricei coeficienţilor este $\begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Scăzând linia a doua din prima linie şi dezvoltând apoi după prima linie, obţinem

   $$\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (m-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (m-1) \cdot 2 = 2 \cdot (m-1).$$

   Sistemul este compatibil determinat dacă şi numai dacă determinantul este nenul, deci pentru $m \neq 1$. Determinăm cu ajutorul regulii Cramer soluţiile *reale* ale sistemului:

   $$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{2(m-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-2}{2(m-1)} = \frac{-1}{m-1},$$
   $$y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{2(m-1)} \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2m-2}{2(m-1)} = 1,$$
   $$z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{1}{2(m-1)} \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-2m}{2(m-1)} = \frac{-m}{m-1},$$

   deci $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{-1}{m-1}, 1, \frac{-m}{m-1}) \in \mathbb{R}^3$. Observăm că $y_0 = 1 \in \mathbb{Z}$. Dacă $x_0 \in \mathbb{Z}$, atunci şi $z_0 = x_0 - 1 \in \mathbb{Z}$. Reciproc, dacă $z_0 \in \mathbb{Z}$, atunci şi $x_0 = z_0 + 1 \in \mathbb{Z}$. Deci $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3 \Leftrightarrow x_0 \in \mathbb{Z}$. Examinăm situaţia în care $x_0 \in \mathbb{Z}$. Folosind faptul că prin ipoteză avem $m \in \mathbb{Z}$. Atunci $x_0 = \frac{-1}{m-1}$ este număr întreg doar dacă este satisfăcută condiţia de divizibilitate $(m-1)|(-1)$, care ce se realizează doar pentru $m-1 \in \{-1, 1\}$, ceea ce revine la $m \in \{0, 2\}$. Deci există două valori m care produc soluţii cu componente întregi. (e)

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $2x - 1 > x + 2$. **(7 pct.)**

   a) $x \in \varnothing$; b) $x \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$; c) $x \in (1, 2)$; d) $x \in (\frac{1}{3}, 1)$; e) $x \in (3, +\infty)$; f) $x \in (2, 3)$.

   Soluţie. Inecuaţia se poate rescrie $2x - 1 > x + 2 \Leftrightarrow x > 3$, deci $x \in (3, \infty)$. (e)

3. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $x^2 - 11x + 18 = 0$ este: **(7 pct.)**

   a) $\{3, 6\}$; b) $\{1, 3\}$; c) $\{2, 9\}$; d) $\{1, 4\}$; e) $\{2, 7\}$; f) $\{0, 1\}$.

   Soluţie. O ecuaţie $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a \neq 0$, are două rădăcini reale distincte $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, dacă $b^2 - 4ac > 0$ şi are o singură rădăcină reală (dublă) $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$, dacă $b^2 - 4ac = 0$. În cazul nostru, avem $a = 1, b = -11, c = 18$, deci $b^2 - 4ac = 25 > 0$ şi deci soluţiile reale ale ecuaţiei sunt $\{x_1, x_2\} = \{\frac{11 \pm 7}{2}\} = \{2, 9\}$. (c)

4. Ecuaţia $2^{2x+1} = 8$ are soluţia: **(7 pct.)**

   a) $x = 1$; b) $x = 0$; c) $x = 2$; d) $x = -1$; e) $x = 3$; f) $x = -2$.

   Soluţie. Ecuaţia se rescrie $2^{2x+1} = 2^3$. Logaritmând în baza 2, obţinem egalitatea exponenţilor, $2x + 1 = 3$, de unde rezultă $x = 1$. (a)

5. Determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ este: **(7 pct.)**

   a) 1; b) 6; c) 5; d) 0; e) 4; f) 3.

   Soluţie. Folosind formula $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, obţinem $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3$. (f)

6. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x+1} + x = 5$. **(7 pct.)**

   a) $x = 5$; b) $x = -1$; c) $x = 0$; d) $x = 4$; e) $x = 3$; f) $x = 7$.

[1] Subiecte date la Admiterea UPB/Sesiunea iulie 2022 la facultăţile: ETTI, AC, FILS.

Soluţie. Existenţa radicalului necesită satisfacerea condiţiei $x+1 \geq 0$, deci $x \in [-1, \infty)$. Ecuaţia se rescrie $5-x = \sqrt{x+1}$, deci din pozitivitatea radicalului obţinem $5-x \geq 0$, deci $x \in (-\infty, 5]$. Din cele două condiţii, rezultă $x \in [-1,5]$. Reordonând termenii ecuaţiei şi ridicând la pătrat, obţinem

$$\sqrt{x+1}+x=5 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=5-x \Leftrightarrow x+1=(5-x)^2 \Leftrightarrow x^2-11x+24=0 \Leftrightarrow x \in \{3,8\}.$$

Observăm că $x=8 \notin [-1,5]$, deci această rădăcină nu convine. Dar $3 \in [-1,5]$ satisface ecuaţia dată, deci $x=3$ este singura soluţie a acesteia. e

Altfel. Din condiţia de existenţă a radicalului obţinem condiţia $x+1 \geq 0$, deci $x \in [-1, \infty)$. Reordonând termenii ecuaţiei şi ridicând la pătrat, obţinem

$$\sqrt{x+1}+x=5 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=5-x \Leftrightarrow x+1=(5-x)^2 \Leftrightarrow x^2-11x+24=0 \Leftrightarrow x \in \{3,8\}.$$

Ambele rădăcini satisfac condiţia $\{3,8\} \subset [-1,\infty)$. Se poate constata prin înlocuire că rădăcina $x=8$ nu satisface ecuaţia dată, deci nu convine. Rădăcina $x=3$ satisface ecuaţia dată, deci $x=3$ este singura soluţie a acesteia.

7. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică astfel ca $a_2=3$ şi $a_3=5$. Să se calculeze a_4. **(7 pct.)**

   a) 7; b) 11; c) 9; d) 8; e) 10; f) 6.

   Soluţie. Condiţia de progresie aritmetică implică $2 \cdot a_3 = a_2 + a_4$, deci $10 = 3 + a_4 \Rightarrow a_4 = 7$. a

   Altfel. Raţia r a progresiei este $r = a_3 - a_2 = 5-3 = 2$. Atunci $a_4 = a_3 + r = 5+2 = 7$.

8. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2$. Să se calculeze $f'(1)$. **(7 pct.)**

   a) 3; b) 4; c) 2; d) 0; e) 7; f) 5.

   Soluţie. Prin derivare termen cu termen a sumei f, obţinem $f'(x) = 3x^2+2x$, deci $f'(1) = 3+2 = 5$. f

9. Să se calculeze $I = \int_0^1 (3x^2+2x)dx$. **(7 pct.)**

   a) $I=\frac{2}{5}$; b) $I=0$; c) $I=2$; d) $I=\frac{1}{3}$; e) $I=3$; f) $I=5$.

   Soluţie. Integrând termen cu termen, obţinem $I = \int_0^1 (3x^2+2x)dx = (x^3+x^2)|_0^1 = 1+1 = 2$. c

10. Fie $f: \mathbb{N}^\star \to \mathbb{R}$, $f(n) = n + [\frac{2022}{n}]$, unde prin $[x]$ notăm partea întreagă a numărului real x. Pentru câte valori $n \in \mathbb{N}^\star$, funcţia f îşi atinge cea mai mică valoare? **(7 pct.)**

    a) 2; b) 4; c) 6; d) 5; e) 3; f) 1.

    Soluţie. Se constată uşor că $n \in \mathbb{N}^\star \subset \mathbb{Z}$ şi proprietăţile părţii întregi

$$[n] = n, \forall n \in \mathbb{Z} \text{ şi } [m]+[n] = [m+n], \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{R}$$

justifică egalitatea $f(n) = \left[n + \frac{2022}{n}\right]$. Dar funcţia $\tilde{f}: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = x + \frac{2022}{x}$ are un minim în punctul $x_* = \sqrt{2022} \sim 44.9\ldots \in (44,45)$. Funcţia continuă $\tilde{f}$ este strict descrescătoare pe intervalul $(0, x_*]$ şi strict crescătoare pe intervalul (x_*, ∞). Atunci, folosind monotonia funcţiei parte întreagă, rezultă că f este descrescătoare pe $\{1,2,3,\ldots,44\}$ şi crescătoare pe $\{45,46,47,\ldots\}$. Comparăm valorile minime ale funcţiei f pe cele două mulţimi, deci $f(44)$ şi $f(45)$. Avem

$$f(44) = [44 + \tfrac{2022}{44}] = 44 + [\tfrac{2022}{44}] = 44 + [45.9\ldots] = 44+45 = 89,$$
$$f(45) = [45 + \tfrac{2022}{45}] = 45 + [\tfrac{2022}{45}] = 45 + [44.9\ldots] = 45+44 = 89.$$

Se constată însă că avem:

$$\begin{cases} f(43) = [90.02\ldots] = 90 > f(44) = [89.9\ldots] = 89, \\ f(45) = [89.9\ldots] = 89, \\ f(46) = [89.9\ldots] = 89 < f(47) = [90.02\ldots] = 90, \end{cases}$$

deci, ţinând cont de inegalităţile nestricte date de monotonie,

$$f(1) \geq \ldots \geq f(42) \geq f(43) > f(44) = f(45) = f(46) < f(47) \leq f(48) \leq \ldots$$

rezultă că există trei valori $n \in \{44,45,46\}$, pentru care se atinge valoarea minimă 89 a funcţiei f. e