Universitatea Politehnica din Bucureşti 2022
Disciplina: Algebră şi Elemente de Analiză Matematică
Varianta Ma [1]

1. Fie sistemul $\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+y-z=2 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$, unde m este un parametru real. Pentru câte valori $m \in \mathbb{Z}$ sistemul are soluţie unică (x_0, y_0, z_0), cu componentele numere întregi? **(7 pct.)**

   a) 4; b) 3; c) 1; d) o infinitate; e) 2; f) 5.

   Soluţie. Determinantul matricei coeficienţilor este $\begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Scăzând linia a doua din prima linie şi dezvoltând apoi după prima linie, obţinem

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (m-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (m-1) \cdot 2 = 2 \cdot (m-1).$$

   Sistemul este compatibil determinat dacă şi numai dacă determinantul este nenul, deci pentru $m \neq 1$. Determinăm cu ajutorul regulii Cramer soluţiile *reale* ale sistemului:

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{2(m-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-2}{2(m-1)} = \frac{-1}{m-1},$$
$$y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{2(m-1)} \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2m-2}{2(m-1)} = 1,$$
$$z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{1}{2(m-1)} \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-2m}{2(m-1)} = \frac{-m}{m-1},$$

   deci $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{-1}{m-1}, 1, \frac{-m}{m-1}) \in \mathbb{R}^3$. Observăm că $y_0 = 1 \in \mathbb{Z}$. Dacă $x_0 \in \mathbb{Z}$, atunci şi $z_0 = x_0 - 1 \in \mathbb{Z}$. Reciproc, dacă $z_0 \in \mathbb{Z}$, atunci şi $x_0 = z_0 + 1 \in \mathbb{Z}$. Deci $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3 \Leftrightarrow x_0 \in \mathbb{Z}$. Examinăm situaţia în care $x_0 \in \mathbb{Z}$. Folosind faptul că prin ipoteză avem $m \in \mathbb{Z}$. Atunci $x_0 = \frac{-1}{m-1}$ este număr întreg doar dacă este satisfăcută condiţia de divizibilitate $(m-1)|(-1)$, care ce se realizează doar pentru $m-1 \in \{-1, 1\}$, ceea ce revine la $m \in \{0, 2\}$. Deci există două valori m care produc soluţii cu componente întregi. e

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2$. Să se calculeze $f'(1)$. **(7 pct.)**

   a) 4; b) 3; c) 0; d) 2; e) 5; f) 7.

   Soluţie. Prin derivare termen cu termen a sumei f, obţinem $f'(x) = 3x^2 + 2x$, deci $f'(1) = 3 + 2 = 5$. e

3. Ecuaţia $2^{2x+1} = 8$ are soluţia: **(7 pct.)**

   a) $x = -1$; b) $x = 2$; c) $x = 1$; d) $x = 0$; e) $x = 3$; f) $x = -2$.

   Soluţie. Ecuaţia se rescrie $2^{2x+1} = 2^3$. Logaritmând în baza 2, obţinem egalitatea exponenţilor, $2x + 1 = 3$, de unde rezultă $x = 1$. c

4. Determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ este: **(7 pct.)**

   a) 3; b) 6; c) 1; d) 5; e) 4; f) 0.

   Soluţie. Folosind formula $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, obţinem $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3$. a

5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^1 |x - t| dt$. Să se calculeze $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$. **(7 pct.)**

   a) $I = \frac{11}{2}$; b) $I = \frac{8}{5}$; c) $I = \frac{4}{3}$; d) $I = \frac{1}{2}$; e) $I = \frac{1}{5}$; f) $I = \frac{7}{3}$.

   Soluţie. Examinând domeniul de integrare al primei integrale şi modulul $|x - t|$, distingem trei cazuri.

   (i) Dacă $x \leq 0$, atunci $x - t \leq 0$ pentru orice $t \in [0, 1]$, deci pe acest interval avem $|x - t| = t - x$, iar

$$f(x) = \int_0^1 |x - t| dt = \int_0^1 (t - x) dt = \left(\frac{t^2}{2} - tx \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - x.$$

[1] Subiecte date la Admiterea UPB/Sesiunea iulie 2022 la facultăţile: ETTI, AC, FILS.

(ii) Dacă $x \in (0,1)$, atunci $|x-t| = \begin{cases} x-t, & t \in [0,x) \\ t-x, & t \in [x,1] \end{cases}$, iar

$$f(x) = \int_0^1 |x-t|dt = \int_0^x (x-t)dt + \int_x^1 (t-x)dt = \left(tx - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^x + \left(\frac{t^2}{2} - tx\right)\Big|_x^1$$
$$= (x^2 - \tfrac{x^2}{2}) + [(\tfrac{1}{2} - x) - (\tfrac{x^2}{2} - x^2)] = x^2 - x + \tfrac{1}{2}.$$

(iii) Dacă $x \geq 1$, atunci $x - t \geq 0$ pentru orice $t \in [0,1]$, deci pe acest interval avem $|x-t| = x-t$, iar

$$f(x) = \int_0^1 |x-t|dt = \int_0^1 (x-t)dt = \left(tx - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = x - \frac{1}{2}.$$

Atunci I se sparge în sumă de trei integrale, în acord cu spargerea domeniului de integrare, $[-1,2] = [-1,0] \cup [0,1] \cup [1,2]$, deci avem

$$I = \int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 (\tfrac{1}{2} - x)dx + \int_0^1 (x^2 - x + \tfrac{1}{2})dx + \int_1^2 (x - \tfrac{1}{2})dx$$
$$= \left(\tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^0 + \left(\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x}{2}\right)\Big|_1^2 = [0 - (-1)] + (\tfrac{1}{3} - 0) + (1 - 0) = \tfrac{7}{3}.$$ f

6. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică astfel ca $a_2 = 3$ şi $a_3 = 5$. Să se calculeze a_4. **(7 pct.)**

a) 8; b) 11; c) 9; d) 6; e) 7; f) 10.

Soluţie. Condiţia de progresie aritmetică implică $2 \cdot a_3 = a_2 + a_4$, deci $10 = 3 + a_4 \Rightarrow a_4 = 7$. e

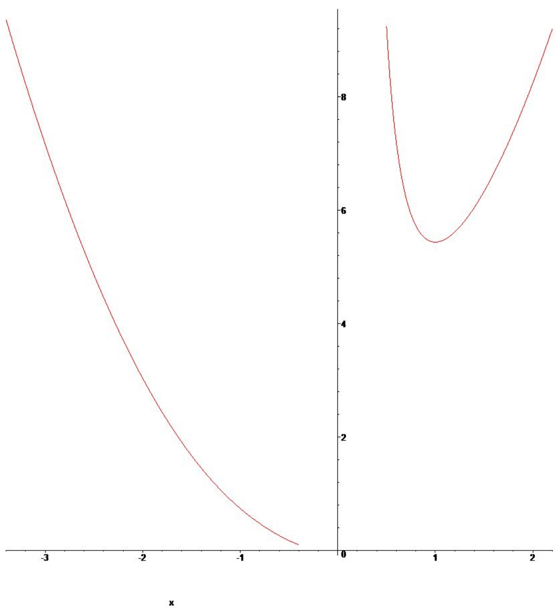
Altfel. Raţia r a progresiei este $r = a_3 - a_2 = 5 - 3 = 2$. Atunci $a_4 = a_3 + r = 5 + 2 = 7$.

7. Să se afle valorile parametrului real m astfel încât ecuaţia $x^2 + 1 = me^{-\frac{1}{x}}$ să aibă trei soluţii reale distincte. **(7 pct.)**

a) $m > 2e$; b) $m \in (1,e)$; c) $m \in (1,e^2)$; d) $m \in (e,2e)$; e) $m < 2e$; f) $m \in (0,1)$.

Soluţie. Ecuaţia se rescrie $m = (x^2+1)e^{1/x}$. Tabelul de variaţie al funcţiei $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2+1)e^{1/x}$ este următorul:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$0_+ \mid +\infty$	$\searrow$	2e	$\nearrow$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	$0_- \mid -\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$



Din tabel şi grafic se observă că o dreaptă $y = m$ paralelă cu axa Ox intersectează graficul în trei puncte distincte dacă şi numai dacă m are valoarea strict mai mare decât ordonata punctului de minim $(1, 2e)$, deci dacă $m > 2e$. a

8. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x+1}+x=5$. **(7 pct.)**

a) $x=0$; b) $x=5$; c) $x=-1$; d) $x=4$; e) $x=7$; f) $x=3$.

Soluţie. Existenţa radicalului necesită satisfacerea condiţiei $x+1\geq 0$, deci $x\in[-1,\infty)$. Ecuaţia se rescrie $5-x=\sqrt{x+1}$, deci din pozitivitatea radicalului obţinem $5-x\geq 0$, deci $x\in(-\infty,5]$. Din cele două condiţii, rezultă $x\in[-1,5]$. Reordonând termenii ecuaţiei şi ridicând la pătrat, obţinem

$$\sqrt{x+1}+x=5\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=5-x\Leftrightarrow x+1=(5-x)^2\Leftrightarrow x^2-11x+24=0\Leftrightarrow x\in\{3,8\}.$$

Observăm că $x=8\notin[-1,5]$, deci această rădăcină nu convine. Dar $3\in[-1,5]$ satisface ecuaţia dată, deci $x=3$ este singura soluţie a acesteia. f

Altfel. Din condiţia de existenţă a radicalului obţinem condiţia $x+1\geq 0$, deci $x\in[-1,\infty)$. Reordonând termenii ecuaţiei şi ridicând la pătrat, obţinem

$$\sqrt{x+1}+x=5\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=5-x\Leftrightarrow x+1=(5-x)^2\Leftrightarrow x^2-11x+24=0\Leftrightarrow x\in\{3,8\}.$$

Ambele rădăcini satisfac condiţia $\{3,8\}\subset[-1,\infty)$. Se poate constata prin înlocuire că rădăcina $x=8$ nu satisface ecuaţia dată, deci nu convine. Rădăcina $x=3$ satisface ecuaţia dată, deci $x=3$ este singura soluţie a acesteia.

9. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $x^2-11x+18=0$ este: **(7 pct.)**

a) $\{1,4\}$; b) $\{3,6\}$; c) $\{2,9\}$; d) $\{1,3\}$; e) $\{0,1\}$; f) $\{2,7\}$.

Soluţie. O ecuaţie $ax^2+bx+c=0$, unde $a\neq 0$ are rădăcini reale distincte $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ dacă $b^2-4ac>0$ şi are o rădăcină reală (dublă) $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$ dacă $b^2-4ac=0$. În cazul nostru, avem $a=1, b=-11, c=18$, deci $b^2-4ac=25>0$ şi deci soluţiile reale ale ecuaţiei sunt $\{x_1,x_2\}=\{\frac{11\pm 7}{2}\}=\{2,9\}$. c

10. Fie $f:\mathbb{N}^\star\to\mathbb{R}$, $f(n)=n+[\frac{2022}{n}]$, unde prin $[x]$ notăm partea întreagă a numărului real x. Pentru câte valori $n\in\mathbb{N}^\star$, funcţia f îşi atinge cea mai mică valoare? **(7 pct.)**

a) 6; b) 2; c) 4; d) 1; e) 3; f) 5.

Soluţie. Se constată uşor că $n\in\mathbb{N}^\star\subset\mathbb{Z}$ şi proprietăţile părţii întregi

$$[n]=n,\forall n\in\mathbb{Z} \text{ şi } [m]+[n]=[m+n],\forall m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{R}$$

justifică egalitatea $f(n)=\left[n+\frac{2022}{n}\right]$. Dar funcţia $\tilde{f}:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $\tilde{f}(x)=x+\frac{2022}{x}$ are un minim în punctul $x_*=\sqrt{2022}\sim 44.9\ldots\in(44,45)$. Funcţia continuă $\tilde{f}$ este strict descrescătoare pe intervalul $(0,x_*]$ şi strict crescătoare pe intervalul (x_*,∞). Atunci, folosind monotonia funcţiei parte întreagă, rezultă că f este descrescătoare pe $\{1,2,3,\ldots,44\}$ şi crescătoare pe $\{45,46,47,\ldots\}$. Comparăm valorile minime ale funcţiei f pe cele două mulţimi, deci $f(44)$ şi $f(45)$. Avem

$$f(44)=[44+\tfrac{2022}{44}]=44+[\tfrac{2022}{44}]=44+[45.9\ldots]=44+45=89,$$
$$f(45)=[45+\tfrac{2022}{45}]=45+[\tfrac{2022}{45}]=45+[44.9\ldots]=45+44=89.$$

Se constată însă că avem:

$$\begin{cases} f(43)=[90.02\ldots]=90>f(44)=[89.9\ldots]=89,\\ f(45)=[89.9\ldots]=89,\\ f(46)=[89.9\ldots]=89<f(47)=[90.02\ldots]=90,\end{cases}$$

deci, ţinând cont de inegalităţile nestricte date de monotonie,

$$f(1)\geq\ldots\geq f(42)\geq f(43)>f(44)=f(45)=f(46)<f(47)\leq f(48)\leq\ldots$$

rezultă că există trei valori $n\in\{44,45,46\}$, pentru care se atinge valoarea minimă 89 a funcţiei f. e