1. Câte soluţii distincte are ecuaţia $\bar{z} = z^2$, $z \in \mathbb{C}$? **(8 pct.)**

   a) O infinitate; b) 5; c) 3; d) 6; e) 1; f) 4.

   Soluţie. Determinăm numărul de soluţii distincte ale ecuaţiei $\bar{z} = z^2, z \in \mathbb{C}$. Din $\bar{z} = z^2$, obţinem $|\bar{z}| = |z^2| = |z|^2$. Cum $|\bar{z}| = |z|$, avem $|z| = |z|^2$, de unde $|z|(1 - |z|) = 0$. Deci $|z| = 0$ sau $|z| = 1$, de unde $z = 0$ sau $|z| = 1$. Examinăm al doilea caz. Ţinând cont că $z\bar{z} = |z|^2 = 1$, deci $\bar{z} = \frac{1}{z}$, ecuaţia se rescrie echivalent $z^3 = 1$, deci z este una dintre cele trei rădăcini complexe ale unităţii. Avem $z^3 = 1 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0 \Leftrightarrow z \in \{1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\}$. În final, soluţiile ecuaţiei sunt în număr de patru, $z \in \{0, 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\}$.

2. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^4} \displaystyle\int_0^x t^2 \cdot \mathrm{e}^{-t^2} \cdot \sin t \, dt$. **(8 pct.)**

   a) 0; b) ∞ ; c) $\dfrac{1}{4}$; d) 1; e) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$; f) $\dfrac{\sin 1}{\mathrm{e}}$.

   Soluţie. Se cere să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x t^2 e^{-t^2} \sin dt$. Se observă că limita este de tipul $0/0$, deci aplicăm regula lui L'Hospital şi obţinem $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x t^2 e^{-t^2} \sin t dt}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 e^{-x^2} \sin x}{4x^3} = \frac{1}{4} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} e^{-x^2} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$.

3. Să se calculeze aria mărginită de dreptele $x = 0$, $x = 1$, axa Ox şi de graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. **(8 pct.)**

   a) $2 \ln 2$; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) $\ln 2$; e) $\frac{\pi}{4}$; f) $\frac{1}{2} \ln 2$.

   Soluţie. Aria este egală cu $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$.

4. Câte soluţii în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ are ecuaţia $x^4 - x^3 y - 8y^4 = 0$? **(6 pct.)**

   a) Nici una; b) Una; c) Două; d) Patru; e) Trei; f) O infinitate.

   Soluţie. Determinăm câte soluţii ale ecuaţiei. Dacă $y = 0$, atunci $x = 0$ şi deci $x = y = 0$ este soluţie în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a ecuaţiei. Dacă $y \neq 0$, atunci ecuaţia este echivalentă cu $(\frac{x}{y})^4 - (\frac{x}{y})^3 - 8 = 0$. Notând $t = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, obţinem $t^4 - t^3 - 8 = 0$. Se observă că $t = 2$ este soluţie a ecuaţiei, care se rescrie $(t-2)(t^3+t^2+2t+4) = 0$. Cum $t^3 + t^2 + 2t + 4 = 0$ nu are rădăcini raţionale, rezultă că $t = 2$ este unica soluţie. Deci $\frac{x}{y} = 2$, de unde $x = 2y$. Se observă că $(0, 0)$ satisface această relaţie, deci $\{(2n, n) | n \in \mathbb{Z}\}$ este mulţimea soluţiilor în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ale ecuaţiei date. Prin urmare ecuaţia are o infinitate de soluţii.

5. Să se calculeze $f'(2)$ pentru funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x - 2^x - x^2$. **(6 pct.)**

   a) 4; b) -4; c) $4 \ln 2$; d) $4(1 + \ln 2)$; e) $2 \ln 2$; f) 0.

   Soluţie. Avem $(x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x(1 + \ln x)$ şi deci $f'(x) = x^x(1 + \ln x) - 2^x \ln 2 - 2x$. Prin urmare $f'(2) = 4(1 + \ln 2) - 4 \ln 2 - 4 = 0$.

6. Se cer cea mai mică şi cea mai mare valoare pentru funcţia $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 5$. **(6 pct.)**

   a) $-5, -2$; b) $-6, -2$; c) 1, 3; d) -6, 3; e) 0, 3; f) -5, 3.

   Soluţie. Funcţia este polinomială de gradul doi, deci graficul acesteia este un arc de parabolă, care conţine vârful $(\frac{-b}{a}, \frac{-\Delta}{4a}) = (1, -6)$ şi care are drept capete punctele $(0, f(0)) = (0, -5)$ şi $(3, f(3)) = (3, -2)$. Deci cea mai mica valoare a functiei este -6, iar cea mai mare valoare este -2. *Altă soluţie.* Avem $f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$, iar tabelul de variaţie este

x	0		1		3
$f'(x)$	-2	$-$	0	$+$	4
$f(x)$	-5	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-2

   deci cea mai mică valoare a funcţiei este -6 şi cea mai mare valoare este -2.

7. Se cere domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+3x)$.**(4 pct.)**

a) $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$; b) $(0, \infty)$; c) $(3, \infty)$; d) $(-3, \infty)$; e) $(1, \infty)$; f) (e, ∞) .

Soluţie. Condiţia de existenţă a funcţiei este $1 + 3x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$. Domeniul maxim de definiţie al funcţiei este $(-\frac{1}{3}, +\infty)$.

8. Câte matrice de forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ verifică relaţia $X^2 = \mathrm{I}_2$; $x, y \in \mathbb{R}$? **(4 pct.)**

a) 4 ; b) 3; c) 2; d) 5; e) 1; f) O infinitate.

Soluţie. Relaţia din ipoteză se rescrie

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2+y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ xy = 0, \end{cases}$$

deci $x = 0$ sau $y = 0$. Dacă $x = 0$, atunci $y^2 = 1$, de unde $y = \pm 1$. Dacă $y = 0$, atunci $x^2 = 1$, de unde $x = \pm 1$. Prin urmare matricele căutate sunt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, deci patru matrice verifică relaţia din enunţ.

9. Fie $a \geq 0$, $b \geq 0$ astfel încât $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$. Atunci **(4 pct.)**

a) $ab = 1$; b) $a = 0$, $b = 0$; c) $a > 1$; d) $a = 0$ sau $b = 0$; e) $a < b$; f) $a^2 + b^2 = 1$.

Soluţie. Din $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$, rezultă $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a+b})^2$, adică $a + b + 2\sqrt{ab} = a + b$, de unde $ab = 0$. Deci $a = 0$ sau $b = 0$.

10. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 2$ în punctul de inflexiune este **(4 pct.)**

a) $y = 4x - 9$; b) $y = -4x$; c) $y = 4x + 13$; d) $y = -4x + 11$; e) $y = -1$; f) $y = -4x + 13$.

Soluţie. Avem $f'(x) = x^2 - 6x + 5$ si $f''(x) = 2x - 6$. Din $f''(x) = 0$, obţinem $x = 3$ şi punctul de inflexiune $(3, f(3))$, adică $(3, -1)$. Tangenta la grafic în punctul $(3, -1)$ este $y + 1 = f'(3)(x-3)$. Cum $f'(3) = -4$, tangenta are ecuaţia $y + 1 = -4(x-3)$, adică $y = -4x + 11$.

11. Să se calculeze $x^2 + y$ dacă $2^x - 3y = 0$, $3^x - 2y = 0$ cu $x, y \in \mathbb{R}$. **(4 pct.)**

a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{5}{6}$; c) $\frac{7}{6}$; d) $\frac{11}{6}$; e) 6 ; f) -6 .

Soluţie. Din cele două relaţii rezultă, respectiv, $y = \frac{2^x}{3}$ şi $y = \frac{3^x}{2}$. Deci $\frac{2^x}{3} = \frac{3^x}{2} \Leftrightarrow 2^{x+1} = 3^{x+1} \Leftrightarrow (\frac{2}{3})^{x+1} = 1 = (\frac{2}{3})^0$, de unde $x = -1$. Atunci $y = \frac{1}{6}$ şi deci $x^2 + y = (-1)^2 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$.

12. Să se determine abscisele punctelor de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x^3$. **(4 pct.)**

a) 0, 2, -2 ; b) 0 ; c) 0 i 3 ; d) 2 ; e) 3 ; f) 2, -2.

Soluţie. Avem $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$. Tabelul de variaţie al funcţiei f este:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$+\infty$

de unde se observă că funcţia admite un singur punct de extrem local (minim), de abscisă $x = 3$.

13. Să se rezolve ecuaţia $3^{x+1} = 9^{\sqrt{x}}$. **(4 pct.)**

a) 4; b) 0 şi 1; c) 1; d) 0; e) -1; f) Nu are soluţii.

Soluţie. Rezolvăm ecuaţia $3^{x+1} = 9^{\sqrt{x}}$. Condiţia de existenţă a radicalului este $x \geq 0$. Ecuaţia se rescrie

$$3^{x+1} = 3^{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow x + 1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 0,$$

deci $\sqrt{x} = 1$, adică $x = 1$.

14. Să se calculeze valoarea expresiei $E = \dfrac{x_2+x_3}{x_1} + \dfrac{x_1+x_3}{x_2} + \dfrac{x_1+x_2}{x_3}$, unde x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$. **(4 pct.)**

a) 1; b) -3; c) -6; d) -1; e) 3; f) 0.

Soluţie. Scriem relaţiile lui Viete: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 6 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = 1 \\ x_1x_2x_3 = -2 \end{cases}$. Obţinem

$$\begin{aligned} E &= \frac{x_2+x_3}{x_1} + \frac{x_1+x_3}{x_2} + \frac{x_1+x_2}{x_3} = \frac{6-x_1}{x_1} + \frac{6-x_2}{x_2} + \frac{6-x_3}{x_3} = \\ &= 6\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right) - 3 = 6\cdot\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3} - 3 = -6. \end{aligned}$$

15. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă sistemul $2x + my = 0$, $3x + 2y = 0$ admite numai soluţia nulă. **(4 pct.)**

a) $m = \frac{3}{4}$; b) $m = \frac{4}{3}$; c) $m \neq \frac{4}{3}$; d) $m \neq 0$; e) $m = -\frac{3}{4}$; f) $m = 3$.

Soluţie. Sistemul are numai soluţia nulă dacă $\begin{vmatrix} 2 & m \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 4 - 3m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{4}{3}$.

16. Să se rezolve inecuaţia $\sqrt{-x-2} - \sqrt[3]{x+5} < 3$. **(4 pct.)**

a) $[-6,-5]$; b) $(-6,-2)$; c) $x \in (-\infty,-2]$; d) $(-5,-2)$; e) $x \in (-\infty,-6]$; f) $x \in (-6,-2]$.

Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului de ordin par este

$$-x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2. \tag{1}$$

Notând $\begin{cases} u = \sqrt{-x-2} \geq 0 \\ v = \sqrt[3]{x+5} \end{cases}$, obţinem relaţiile $\begin{cases} u^2+v^3 = 3 \\ u - v < 3 \end{cases}$. Din prima relaţie rezultă $u = \sqrt{3-v^3}$, deci înlocuind in inegalitate, obţinem $\sqrt{3-v^3} - v < 3 \Leftrightarrow \sqrt{3-v^3} < v+3$. Distingem două cazuri: i) dacă $v+3 < 0$, obţinem $0 \leq \sqrt{3-v^3} < v+3 < 0$ contradicţie, deci ecuaţia nu are soluţii; ii) dacă $v+3 \geq 0$ atunci

$$v \geq -3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+5} \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -32. \tag{2}$$

Ridicând la pătrat ambii membri ai inegalităţii $\sqrt{3-v^3} < v+3$, obţinem

$$3 - v^3 < v^2 + 6v + 9 \Leftrightarrow v^3 + v^2 + 6v + 6 > 0 \Leftrightarrow (v+1)(v^2+6) > 0 \Leftrightarrow v+1 > 0.$$

Această inegalitate se rescrie

$$\sqrt[3]{x+5} > -1 \Leftrightarrow x+5 > -1 \Leftrightarrow x > -6 \tag{3}$$

Din relaţiile (1), (2) şi (3), obţinem $x \in (-6,-2]$.

17. Numerele x, $2x+3$, $x+2$ sunt termenii unei progresii aritmetice, în ordinea scrisă. Să se determine raţia progresiei. **(4 pct.)**

a) 3 ; b) 2 ; c) $x+3$; d) -1 ; e) 1 ; f) -2 .

Soluţie. Condiţia ca numerele să fie termenii unei progresii aritmetice, în ordinea scrisă, este: $x + (x+2) = 2(2x+3) \Leftrightarrow 2x+2 = 4x+6 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$, deci termenii devin $-2, -1, 0$, iar raţia este 1.

18. Se cere limita $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$. **(4 pct.)**

a) 1 ; b) $\frac{1}{2}$; c) ∞; d) 2; e) 0; f) Nu există.

Soluţie. Rationalizând, obţinem

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$