1. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+4x}\right)$.

   a) ∞; b) -2; c) 2; d) $-\infty$; e) nu există; f) 0.

   Soluţie. Amplificând cu conjugata, obţinem:

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+4x})=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)}=-2.$$

2. Se consideră funcţia $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x>0\\ m, & x=0\\ 1-x^2, & x<0.\end{cases}$

   Să se determine m real astfel încât să existe $f'(0)$.

   a) -1; b) 2; c) -2; d) 1; e) 0; f) $m\in(-1,1)$.

   Soluţie. Continuitatea în 0 este asigurată de condiţiile $l_s(0)=f(0)=l_d(0)$ şi deci $m=1$. Pentru $m=1$ funcţia f este continuă în 0 şi $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$. Din consecinţa teoremei lui Lagrange rezultă că f este derivabilă în 0 şi $f'(0)=0$.

3. Să se determine numărul întreg cel mai apropiat de $\sqrt[4]{44}$.

   a) 3; b) 6; c) 2; d) 4; e) 5; f) 7.

   Soluţie. Folosim monotonia funcţiilor $(\,\cdot\,)^4$ şi $\sqrt[4]{\cdot}$ pentru argument real pozitiv. Dacă $m,n\in\mathbb{N}$, avem $m\geq\sqrt[4]{44}\geq n\Leftrightarrow m^4\geq 44\geq n^4$. Cele mai apropiate puteri de numere naturale care încadrează numărul 44 sunt $3^4=81>44$ şi $2^4=16<44$. Dar $81-44=37>44-16=28$. Deci întregul cel mai apropiat de $\sqrt[4]{4}$ este 2.

4. Câte cifre în baza 10 are numărul

$$N=1+2\cdot 10+3\cdot 10^2+\cdots+9\cdot 10^8+10\cdot 10^9\quad ?$$

   a) 11; b) 14; c) 9; d) 10; e) 12; f) 8.

   Soluţie. Avem $10\cdot 10^9<N<10^9+10\cdot 10^9$ deci $10^{10}<N<10^{11}$, adică N are 11 cifre.

5. Să se calculeze $f''(0)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\,e^x+\ln(x^2+1)$.

   a) 4; b) -1; c) 6; d) 0; e) 2; f) 8.

   Soluţie. Avem $f'(x)=(x+1)e^x+\dfrac{2x}{x^2+1}$ şi

$$f''(x)=(x+2)e^x+\frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2}=(x+2)e^x+\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

   şi deci $f''(0)=2+2=4$.

6. Să se calculeze aria mulţimii cuprinse între curba de ecuaţie $y=x\,e^x$ şi dreptele $x=-1$, $x=0$, $y=0$.

   a) $1-\frac{2}{e}$; b) 2; c) 3; d) -1; e) -2; f) e.

   Soluţie. Aria este $\int_{-1}^{0}|xe^x|\,dx=\int_{-1}^{0}-(xe^x)dx=e^x(1-x)\,|_{-1}^{0}=1-\frac{2}{e}$.

7. Să se calculeze integrala $\displaystyle\int_3^{19}\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}\ dx$.

   a) $\frac{38}{3}$; b) $\frac{19}{2}$; c) $\frac{39}{2}$; d) $\frac{18}{5}$; e) $\frac{36}{5}$; f) $\frac{38}{5}$.

Soluţie. Din condiţia de existenţă a radicalului $\sqrt{x-3}$, avem $x-3\geq 0 \Leftrightarrow x\in[3,\infty)$. Cum $x\in[3,19]$, această condiţie este satisfăcută. Se observă că

$$\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}=\sqrt{(\sqrt{x-3}-3)^2}=|\sqrt{x-3}-3|=\begin{cases}3-\sqrt{x-3}, & x\in[3,12]\\ \sqrt{x-3}-3, & x\in[12,19].\end{cases}$$

Atunci

$$I=\int_3^{19}\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}\ \mathrm{d}x\ =\int_3^{12}(3-\sqrt{x-3})dx+\int_{12}^{19}(\sqrt{x-3}-3)dx.$$

Efectuăm schimbarea de variabilă $y=\sqrt{x-3}$, deci $x=y^2+3$, $dx=2ydy$ şi $x=3\Rightarrow y=0$, $x=12\Rightarrow y=3$, $x=19\Rightarrow y=4$. Rezultă

$$I=\int_0^3(3-y)2ydy+\int_3^4(y-3)2ydy=\left(3y^2-\frac{2}{3}y^3\right)\Big|_0^3+\left(\frac{2}{3}y^3-3y^2\right)\Big|_3^4=\frac{38}{3}.$$

8. Fie a şi b numere reale astfel încât $-5<a<2$ şi $-7<b<1$. Atunci valorile posibile ale produsului ab sunt cuprinse în intervalul:

a) $(2,35)$; b) $(-14,7)$; c) $(-12,3)$; d) $(-14,35)$; e) $(-35,2)$; f) $(-14,2)$.

Soluţie. Pentru $a,b>0$ avem $ab<2\cdot 1=2$. Pentru $a,b<0$ avem $0<-a<5$ şi $0<-b<7$ şi deci $ab<35$. Pentru $a<0<b$ avem $0<-a<5$ si $0<b<1$ şi deci $-ab<5\Leftrightarrow ab>-5$. Dacă $b<0<a$ rezultă $0<-b<7$ şi $0<a<2$. Prin înmulţire avem $-ab<14$, deci $ab>-14$. Din aceste consideraţii avem $-14<ab<35\Leftrightarrow ab\in(-14,35)$. Acest rezultat este optim deoarece $\lim_{\varepsilon\searrow 0}(-5+\varepsilon)(-7+\varepsilon)=35$ şi $\lim_{\varepsilon\searrow 0}(2-\varepsilon)(-7+\varepsilon)=-14$.

9. Se consideră permutările

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix},\quad \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}.$$

Să se rezolve ecuaţia $\sigma^{11}\cdot x=\tau$.

a) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$; b) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$; c) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$;
d) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$; e) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$; f) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$.

Soluţie. Avem $\sigma^2=e$ şi deci $\sigma^{11}=\sigma^{10}\cdot\sigma=\sigma$. Ecuaţia devine $\sigma\cdot x=\tau$ şi de aici

$$x=\sigma^{-1}\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}.$$

10. Dacă $2x-y+z=0$, $x+y-z=0$ şi $y\neq 0$, să se calculeze valoarea raportului

$$\frac{x^2-2y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

a) 2; b) 4; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{2}$; e) 3; f) 0.

Soluţie. Din $2x+z=y$ şi $x-z=-y$ rezultă $x=0$ şi $z=y$, deci $\dfrac{x^2-2y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{-2y^2+y^2}{y^2+y^2}=-\dfrac{1}{2}$.

11. Valoarea raportului $\frac{\ln 15}{\lg 15}$ este

a) $\frac{e}{15}$; b) 15; c) 5; d) $\lg e$; e) $\ln 10$; f) 1.

Soluţie. Avem $\lg 15=\dfrac{\ln 15}{\ln 10}$ şi deci $\dfrac{\ln 15}{\lg 15}=\ln 10$.

12. Să se determine suma soluţiilor ecuaţiei $x^3+x+\hat{2}=\hat{0}$ în $\mathbb{Z}_6$.

a) $\hat{0}$; b) $\hat{4}$; c) $\hat{5}$; d) $\hat{1}$; e) $\hat{3}$; f) $\hat{2}$.

Soluţie. Prin înlocuiri succesive, se observă că dintre valorile $\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$, doar $\hat{2}$ şi $\hat{5}$ verifică ecuaţia. Suma căutată este deci $\hat{2}+\hat{5}=\hat{1}$.

13. Robinetul A umple un rezervor gol în două ore, iar robinetul B umple acelaşi rezervor în patru ore. În câte minute vor umple acelaşi rezervor gol robinetele A şi B curgând împreună ?

a) 40 min; b) 80 min; c) 100 min; d) 360 min; e) 180 min; f) 60 min.

Soluţie. Într-o oră primul robinet umple $\frac{1}{2}$ din bazin iar al doilea umple $\frac{1}{4}$ din bazin. Ambele robinete umplu bazinul în $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$ ore adică $\frac{4}{3}\cdot 60 = 80\,\text{min}$.

14. Câţi termeni raţionali sunt în dezvoltarea $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{25}$?

a) 6; b) 4; c) 5; d) 24; e) nici unul; f) 25.

Soluţie. Termenul general este $T_{k+1} = C_{25}^{k}(\sqrt{2})^{25-k}\cdot(\frac{1}{\sqrt[3]{2}})^{k} = C_{25}^{k}2^{\frac{5(15-k)}{6}}$, $k=\overline{0,25}$. Este necesar şi suficient ca $\frac{15-k}{6} = h \in \mathbb{Z}$, deci $k = 15-6h$ cu $h\in\mathbb{Z}$. Condiţia $k\in\overline{0,25}$ se rescrie

$$0 \le 15-6h \le 25 \Leftrightarrow -\frac{10}{6} \le h \le \frac{5}{2} \Leftrightarrow h\in\{-1,0,1,2\} \Leftrightarrow k\in\{21,15,9,3\}\subset\overline{0,25}.$$

Aceste valori corespund termenilor $\{T_{21},T_{16},T_{10},T_{4}\}$ şi deci dezvoltarea binomială conţine patru termeni raţionali.

15. Să se determine m real dacă există o singură pereche (x,y) de numere reale astfel încât $y\ge x^2+m$ şi $x \ge y^2+m$.

a) nu există m; b) $m=\frac{1}{4}$; c) $m=0$; d) $m\ge\frac{1}{8}$; e) $m<\frac{1}{8}$; f) $m=1$.

Soluţie. Adunând relaţiile, obţinem

$$x^2+y^2-x-y+2m\le 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le -2m+\frac{1}{2}.$$

Dacă $-2m+\frac{1}{2}<0$ se obţine o contradicţie. Dacă $m=\frac{1}{4}$, atunci $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=0$. Deci $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$. Dacă $m<\frac{1}{4}$ alegem $x=y$, $x^2-x+m\le 0$ deci $x\in\left[\frac{1-\sqrt{1-4m}}{2},\frac{1+\sqrt{1+4m}}{2}\right]$, deci există o infinitate de soluţii cu proprietatea din enunţ. Deci răspunsul este $m=\frac{1}{4}$.